

- CUPRINS -

PREFAȚĂ	4
CAPITOLUL 1	5
PROPRIETĂȚILE FLUIDELOR	5
Noțiuni teoretice	5
Aplicații	8
CAPITOLUL 2	12
STATICA FLUIDELOR.....	12
Noțiuni teoretice	12
Aplicații	13
CAPITOLUL 3	20
CINEMATICA FLUIDELOR.....	20
Noțiuni teoretice	20
Aplicații	21
CAPITOLUL 4	28
DINAMICA FLUIDELOR IDEALE.....	28
Noțiuni teoretice	28
Aplicații	29
CAPITOLUL 5	35
DINAMICA FLUIDELOR REALE ÎN MIȘCARE LAMINARĂ	35
Noțiuni teoretice	35
Aplicații	36
CAPITOLUL 6	43
DINAMICA FLUIDELOR REALE ÎN MIȘCARE TURBULENTĂ	43
Noțiuni teoretice	43
Aplicații	44
CAPITOLUL 7	48
MIȘCAREA PERMANENTĂ ÎN CONDUCTE SUB PRESIUNE.....	48
Noțiuni teoretice	48
Aplicații	49
CAPITOLUL 8	54
MIȘCĂRI EFLUENTE PERMENENTE.....	54
Noțiuni teoretice	54
Aplicații	55
CAPITOLUL 9	59
TEORIA TURBOMAȘINILOR.....	59
Noțiuni teoretice	59
Aplicații	60
CAPITOLUL 10	62
TURBOPOMPE SI VENTILATOARE.....	62
Noțiuni teoretice	62
Aplicații	63
CAPITOLUL 11	69

TURBINE HIDRAULICE	69
Noțiuni teoretice	69
Aplicații	70
CAPITOLUL 12	74
POMPE VOLUMICE	74
Noțiuni teoretice	74
Aplicații	75
CAPITOLUL 13	78
ACȚIONĂRI HIDRAULICE	78
Noțiuni teoretice	78
Aplicații	79
BIBLIOGRAFIE	86

PREFAȚĂ

Lucrarea de față se adresează în special studenților din anii II și III ai secției de Centrale Termoelectrice dar și studenților din anul II ai secției de Electroenergetică care studiază disciplinele de “**Mecanica fluidelor**” și “**Mașini și acționări hidraulice**”.

Structura cărții constă în 13 capitole, care poartă numele capitolelor din cursurile de specialitate și cuprinde 48 de probleme rezolvate, alese astfel încât să exemplifice cât mai bine noțiunile predate la curs și probleme propuse studenților spre rezolvare.

Astfel, în lucrare sunt cuprinse aplicații privind proprietățile fizice ale fluidelor, statica fluidelor, cinematica fluidelor, dinamica fluidelor ideale, dinamica fluidelor reale în mișcare laminară, dinamica fluidelor reale în mișcare turbulentă, mișcarea permanentă în conducte sub presiune, mișcări efluente permanente, teoria turbomașinilor, pompe și ventilatoare, turbine hidraulice, pompe volumice și acționări hidraulice.

În cadrul fiecărui capitol s-a făcut o prezentare de noțiuni teoretice și relații de calcul, necesare înțelegerii și rezolvării problemelor.

Problemele au fost alcătuite pe baza consultării unor materiale documentare moderne.

Pornind de la aceste considerente, sperăm ca prin prezenta lucrare să facilităm munca de pregătire a studenților, creând o legătură mai strânsă între cunoștințele predate la curs și aplicațiile practice.

Autoarele

CAPITOLUL 1

PROPRIETĂȚILE FLUIDELOR

Noțiuni teoretice

Prin fluid se înțelege un mediu material continuu, care ia forma recipientului care îl conține. Prin urmare, fluidele se caracterizează printr-o slabă coeziune între molecule. În categoria fluidelor intră lichidele și gazele.

Dintre cele mai importante proprietăți ale fluidelor fac parte:

Densitatea, care se definește cu relația:

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{dm}{dV} \quad (1.1)$$

unde Δm este o masă elementară de fluid, iar ΔV este volumul acesteia.

Se mai utilizează și noțiunea de densitate relativă, adică raportul dintre densitatea absolută a unui fluid, dată de relația (1.1) și densitatea absolută a unui fluid de referință, aflat în aceleași condiții de presiune și temperatură, sau în condiții standard. Ca fluid de referință se alege de obicei apa pentru lichide și aerul pentru gaze.

Greutatea specifică, definită cu relația:

$$\gamma = \rho \cdot g \quad (1.2)$$

unde g este accelerația gravitațională.

Pentru lichide, greutatea specifică relativă se calculează prin raportarea la greutatea specifică a apei aflată la 4 °C. (De obicei, în calculele tehnice se consideră pentru apă $\gamma=9810 \text{ N/m}^3$).

În general, pentru fluid, valorile densității și greutății specifice depind de presiune, temperatură și punct.

Presiunea, a cărei relație de definiție este:

$$p = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} = \frac{dF}{dA} \quad (1.3)$$

unde ΔF reprezintă forța care acționează asupra elementului de arie ΔA .

Deformabilitatea, reprezintă proprietatea fluidului de a se deforma sub acțiunea unor forțe exterioare sau a temperaturii. Aprecierea deformabilității se face, de obicei, cu coeficientul de compresibilitate β , definit cu relația:

$$\frac{\Delta V}{V} = -\beta \cdot \Delta p \quad (1.4)$$

sau cu coeficientul de dilatație α , definit cu relația:

$$\frac{\Delta V}{V} = \alpha \cdot \Delta T \quad (1.5)$$

unde ΔV reprezintă variația volumului V , Δp este variația presiunii, iar ΔT este variația temperaturii absolute.

Inversul coeficientului de compresibilitate se numește modul de elasticitate:

$$\varepsilon = 1/\beta \quad (1.6)$$

Vâscozitatea, care reprezintă proprietatea fluidelor de a se opune deplasării particulelor care îl compun. Dacă se consideră mișcarea a două straturi de fluid aflate la distanța infinit mică dy și care alunecă unul față de altul cu viteza relativă $d\vec{v}$, valoarea tensiunii tangențiale care ia naștere între cele două straturi este:

$$\tau = -\eta \frac{d\vec{v}}{dy} \tag{1.7}$$

unde η poartă numele de *coeficient de vâscozitate dinamică*.

Se mai definește *coeficientul de vâscozitate cinematică*:

$$\nu = \eta / \rho \tag{1.8}$$

Coeficienții de vâscozitate variază cu temperatura în mod diferit la lichide și la gaze. Variația lui ν este ilustrată în figura 1.1, pentru apă și aer uscat. La lichide, ν scade odată cu creșterea temperaturii, iar la gaze crește cu temperatura. De această comportare trebuie să se țină seama în problemele de lubrificație, ca și în alte aplicații practice.

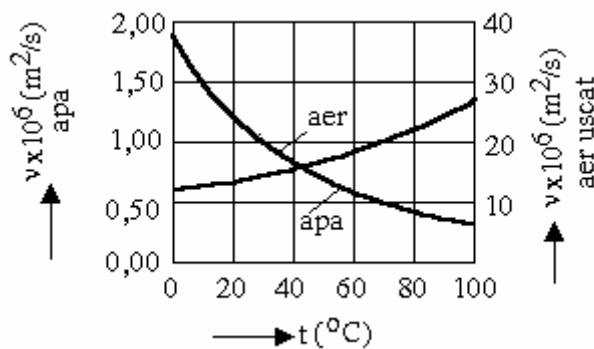


Fig. 1.1 Variația coeficientului cinematic de vâscozitate, în funcție de temperatură

În practică, este uneori posibilă neglijarea vâscozității prin introducerea modelului de fluid perfect. Adoptarea acestei ipoteze simplificatoare depinde, însă, de îndeplinirea unor condiții speciale. În tabelul 1.1 se prezintă unitățile de măsură pentru mărimile definite anterior.

Tabelul 1.1 Unități de măsură ale mărimilor caracteristice proprietăților fluidelor

Nr. crt.	Mărimea	Unitatea de măsură		Relația de transformare
		Fundamentală	Suplimentară	
1	Densitatea, ρ	Kg/m^3		
2	Greutatea specifică, γ	N/m^3		
3	Presiunea, p	$\text{Pa}=\text{N/m}^2$	Bar	$1\text{bar}=10^{-5}\text{ Pa}$
			Atmosferă tehnică	$1\text{at}=9,81 \cdot 10^4\text{ Pa}$
			Atmosferă fizică	$1\text{At}=101325\text{ Pa}$
			mm coloană de apă	$1\text{mmH}_2\text{O}=9,80665\text{ Pa}$
			mm coloană de mercur	$1\text{mm Hg}=133,322\text{ Pa}$
			Pounds square inch	$1\text{p.s.i.}=6,89 \cdot 10^3\text{ Pa}$
4	Coeficientul de compresibilitate, β	m^2/N		
5	Coeficientul de dilatare, α	K^{-1}		
6	Vâscozitatea dinamică, η	Ns/m^2	Poise	$1\text{P}=0,1\text{ Ns/m}^2$
7	Vâscozitatea cinematică, ν	m^2/s	Stokes	$1\text{St}=10^{-4}\text{ m}^2/\text{s}$
8	Modulul de elasticitate, ϵ	N/m^2		

În mod curent, o relație de forma:

$$f(p, V, T) = 0 \quad (1.9)$$

unde p , V , T reprezintă presiunea, volumul și respectiv temperatura masei m de fluid studiat, poartă numele de ecuație de stare. Această relație îmbracă forme diferite pentru lichide și pentru gaze. Astfel, ecuația de stare a lichidelor este:

$$\rho = \rho_0 [1 + \beta(p - p_0) - \alpha(T - T_0)] \quad (1.10)$$

unde ρ_0 , p_0 , T_0 reprezintă densitatea, presiunea și temperatura fluidului, în stare inițială.

În cazul gazelor, ecuația de stare este:

$$\frac{p}{\rho} = RT \quad (1.11)$$

sau

$$pV = \frac{m}{M} \mathfrak{R}T \quad (1.12)$$

unde R este constanta specifică a gazului, \mathfrak{R} este constanta universală a gazelor ($\mathfrak{R} = 8314 \text{ J/kmol K}$) și M este masa kilomolară a gazului. Această ecuație, în forma (1.11) sau (1.12), poartă numele de ecuația Clapeyron-Mendeleev.

În continuare, în tabelele 1.2 – 1.6 se prezintă valorile densității, coeficientului de compresibilitate, modulului de elasticitate, coeficientului de dilatare, constanta specifică a gazului și coeficientului cinematic de vâscozitate, pentru câteva fluide uzuale.

Tabelul 1.2. Densitatea unor fluide la presiunea normală (760 mm Hg)

Lichid	Densitate, ρ [kg/m ³] la 20 °C	Gaz	Densitate, ρ [kg/m ³] la 20 °C
Acetonă	791	Acetilenă	1,1709
Acid acetic	1049	Aer	1,293
Acid sulfuric	1834	Amoniac	0,7714
Alcool etilic	789,5	Argon	1,7839
Alcool metilic	792	Azot	1,2505
Anilină	1022	Bioxid de carbon	1,9748
Apă	998,2	Bioxid de sulf	2,9263
Benzen	879	Clor	3,22
Cloroform	1489	Clorură de metil	2,307
Eter etilic	714	Etan	1,356
Glicerină	1260	Helium	0,1785
Lapte	1200 ... 1050	Hidrogen	0,09887
Mercur	13546	Metan	0,7168
Nitroglicerină	1600	Neon	0,8999
Toluen	866	Oxid de carbon	1,25
Ulei de ungere	871	Oxigen	1,42895
Ulei de transformator	866	Propan	2,019

Tabelul 1.3. Coeficientul de compresibilitate și modulul de elasticitate pentru lichide uzuale

Lichid	Coeficient de compresibilitate $\beta \cdot 10^{10}$ [m ² /N]	Modul de elasticitate $\varepsilon \cdot 10^{10}$ [N/m ²]
Apă	5,120	0,195
Glicerină	2,550	0,392
Mercur	0,296	3,378
Petrol	8,660	0,115

Tabelul 1.4. Coeficientul de dilatare volumică (izobară) pentru câteva lichide la presiune normală (760 mm Hg) și la temperatura 18 °C

Lichid	Coeficient de dilatare volumică $\alpha \cdot 10^3$ [K ⁻¹]	Lichid	Coeficient de dilatare volumică $\alpha \cdot 10^3$ [K ⁻¹]
Acetonă	1,43	Benzen	1,06
Alcool etilic	1,10	Cloroform	1,28
Alcool metilic	1,19	Glicerină	0,50
Anilină	0,85	Mercur	0,18
Apă	0,301	Petrol	0,92 ... 1,00

Tabelul 1.5. Constanta specifică a gazului, R

Gaz	Constanta gazului R [J/kgK]	Gaz	Constanta gazului R [J/kgK]
Acetilenă	319,7	Heliu	2079,7
Aer uscat	29,27	Hidrogen	4123,1
Amoniac	49,78	Hidrogen sulfurat	244,3
Argon	21,23	Kripton	100,4
Azot	30,26	Metan	518,9
Bioxid de carbon	19,25	Neon	411,8
Bioxid de sulf	13,24	Oxid de carbon	277,2
Clor	11,96	Oxigen	259,9
Clorură de metil	16,80	Ozon	173,4
Etan	28,22	Propan	188,8
Etilenă	30,25	Propilenă	198,1
Fluor	22,30	Xenon	63,9

Tabelul 1.6. Coeficientul de vâscozitate cinematică la presiune normală (760 mm Hg)

Lichid	Coeficient cinematic de vâscozitate la 20 °C $\nu \cdot 10^6$ [m ² /s]	Gaz	Coeficient cinematic de vâscozitate la 0 °C $\nu \cdot 10^6$ [m ² /s]
Acetonă	0,418	Acetilenă	8,711
Acid sulfuric	13,850	Aer uscat	13,0
Apă pură	1,01	Amoniac	12,056
Alcool etilic	1,520	Argon	11,884
Alcool metilic	0,737	Azot	13,275
Anilină	4,335	Bioxid de carbon	6,998
Benzen	0,739	Bioxid de sulf	3,957
Cloroform	0,390	Etan	6,305
Eter etilic	0,340	Heliu	104,202
Glicerină	1,175	Hidrogen	93,548
Mercur	0,115	Metan	14,439
Toluen	0,677	Neon	33,126
Ulei de ungere	14,986	Oxigen	13,436
Ulei de transformator	36,486	Propan	3,717

Aplicații

Probleme rezolvate

- 1.1. Să se calculeze densitatea bioxidului de carbon (CO_2), la temperatura $\theta = 50^\circ\text{C}$ și presiunea $p=920$ mmHg.

Soluție

Densitatea se obține din ecuația de stare (1.12):

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{pM}{\mathfrak{R}T}$$

unde:

$$p = 920 \text{ mmHg} = 920 \cdot 133,322 \cong 1,23 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

$$M_{\text{CO}_2} = 12 + 2 \cdot 16 = 44 \text{ kg/Kmol}$$

$$\mathfrak{R} = 8314 \text{ J/KmolK}$$

$$T = 273,15 + \theta = 273,15 + 50 = 323,15 \text{ K}$$

Rezultă:

$$\rho = \frac{1,23 \cdot 10^5 \cdot 44}{8314 \cdot 323,15} = 2,01 \quad \text{Kg/m}^3$$

- 1.2. Presiunea parțială a vaporilor de apă în atmosferă este presiunea pe care aceștia ar exercita-o dacă nu ar exista aer, în timp ce presiunea barometrică corespunde sumei presiunilor parțiale ale vaporilor și aerului. Dacă presiunea parțială a vaporilor este $p = 0,05$ at, la temperatura $\theta = 30^\circ\text{C}$, să se determine greutatea lor specifică.

Soluție

Se determină densitatea, din relația (1.12):

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{pM}{\mathfrak{R}T}$$

apoi greutatea specifică cu relația (1.2):

$$\gamma = \rho \cdot g = \frac{gpM}{\mathfrak{R}T}$$

unde:

$$g = 9,81 \text{ m/s}^2$$

$$p = 0,05 \cdot 9,81 \cdot 10^4 = 4905 \text{ Pa}$$

$$M_{\text{H}_2\text{O}} = 2 \cdot 1 + 16 = 18 \text{ kg/Kmol}$$

$$\mathfrak{R} = 8314 \text{ J/KmolK}$$

$$T = 273,15 + \theta = 273,15 + 30 = 303,15 \text{ K}$$

Rezultă:

$$\gamma = \frac{9,81 \cdot 4905 \cdot 18}{8314 \cdot 303,15} \cong 0,34 \text{ N/m}^3$$

- 1.3. Să se calculeze creșterea presiunii dintr-o autoclavă plină cu apă, închisă ermetic, dacă se mărește temperatura cu $\Delta T = 55$ K. Coeficientul de dilatare volumică izobară al apei este $\alpha = 1,8 \cdot 10^{-4} \text{ K}^{-1}$, iar coeficientul de compresibilitate izotermică $\beta = 4,19 \cdot 10^{-10} \text{ m}^2/\text{N}$. Se neglijează deformația elastică a autoclavei.

Soluție

Se utilizează, pentru rezolvare, relația (1.10):

$$\rho = \rho_0 [1 + \beta(p - p_0) - \alpha(T - T_0)]$$

și se scrie sub forma: $\frac{m}{V} = \frac{m}{V_0} [1 + \beta(p - p_0) - \alpha(T - T_0)]$

Dacă se împarte ultima relație cu m (masa apei din autoclavă), rezultă:

$$\frac{1}{V} = \frac{1}{V_0} [1 + \beta(p - p_0) - \alpha(T - T_0)]$$

Dar, deoarece autoclava se consideră nedeformabilă, $V = V_0$ și, în urma înmulțirii cu această cantitate, relația devine:

$$1 = 1 + \beta(p - p_0) - \alpha(T - T_0)$$

sau $\beta\Delta p = \alpha\Delta T$

de unde:

$$\Delta p = \frac{\alpha\Delta T}{\beta} = \frac{1,8 \cdot 10^{-4} \cdot 55}{4,19 \cdot 10^{-10}} = 23,62 \cdot 10^6 \text{ Pa}$$

- 1.4.** Distribuția vitezelor la mișcarea unui fluid într-o conductă dreaptă este dată de legea $v = (1 - r^2/r_0^2)v_{\max}$, ca în figura 1.2, unde r_0 este raza conductei, r este o rază oarecare, $r \in [0, r_0]$, iar v_{\max} este viteza în axa conductei.

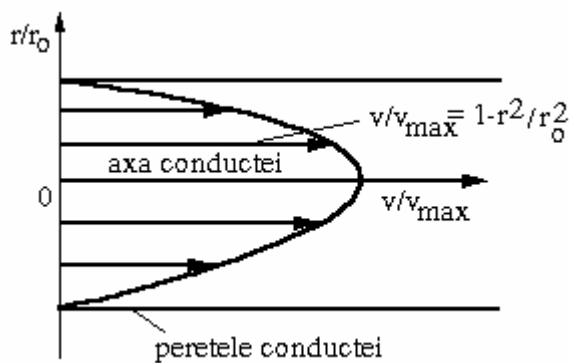


Figura 1.2. Distribuția parabolică a vitezei la mișcarea laminară a unui fluid într-o conductă circulară

Cunoscând $r_0 = 4$ cm, $v_{\max} = 0,2$ m/s și coeficientul de vâscozitate dinamică al fluidului $\eta = 0,5$ Ns/m², să se determine distribuția tensiunilor tangențiale τ și valoarea maximă a acestora.

Soluție

Tensiunile tangențiale sunt date de legea lui Newton, exprimată prin relația (1.7)

$$\tau = -\eta \frac{dv}{dy} = -\eta \frac{dv}{dr}$$

semnul “-” arată faptul că viteza v scade, când raza r crește (conform figurii 1.2)

Rezultă:

$$\tau = -\eta \frac{d\left[\left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right)v_{\max}\right]}{dr} = -\eta \left(-\frac{2r}{r_0^2}v_{\max}\right) = 2\eta v_{\max} \frac{r}{r_0^2}$$

Dacă $r = 0$, atunci $\tau = 0$

Dacă $r = r_0$, atunci $\tau = \tau_{\max} = \frac{2\eta v_{\max}}{r_0} = \frac{2 \cdot 0,5 \cdot 0,2}{0,04} = 5 \text{ Pa}$

Prin urmare, distribuția tensiunilor în interiorul conductei este:

$$\frac{\tau}{\tau_{\max}} = 2\eta v_{\max} \frac{r}{r_0^2} \cdot \frac{r_0}{2\eta v_{\max}} = \frac{r}{r_0}$$

Reprezentarea grafică a acestei relații s-a făcut în figura 1.3.

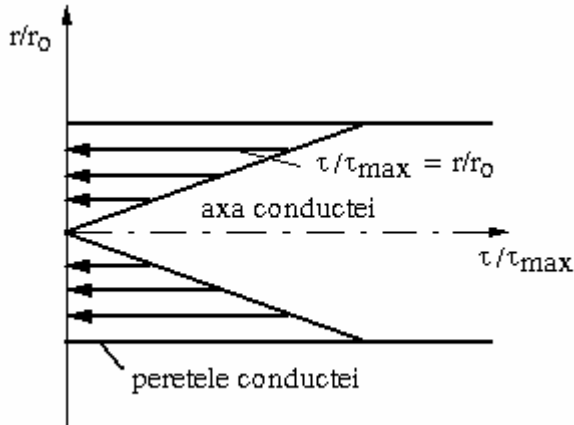


Figura 1.3. Distribuția liniară a tensiunilor tangențiale în interiorul fluidului la mișcarea în conducta circulară

Probleme propuse

- 1.5. Să se determine volumul ΔV ocupat, la presiunea $p_a=1$ at, de aerul evacuat dintr-un recipient de capacitate $V=500$ l, dacă presiunea în recipient scade de la $p_1=150$ at la $p_2=110$ at, iar temperatura T rămâne neschimbată.
- 1.6. Un amestec cu compoziția masică de 30% hidrogen și 70% azot are greutatea $G=15$ N și presiunea $p=1,5$ at. Să se determine masele gazelor componente și presiunile lor parțiale.
- 1.7. O butelie cu capacitatea de 25 dm³ conține hidrogen la presiunea $p_1=5,9$ MN/m² și temperatura $T_1=295$ K. Masa kilomolară a hidrogenului este $M=2$, iar constanta universală a gazelor $R=8314$ J/Kmol·K. Să se determine:
 - a) presiunea indicată de manometrul montat pe butelie, la temperatura $T_2=260$ K;
 - b) masa hidrogenului din butelie;
 - c) temperatura la care există pericol de explozie, dacă butelie rezistă până la cel mult $p_3=7,5$ MN/m².

CAPITOLUL 2

STATICA FLUIDELOR

Noțiuni teoretice

Statika fluidelor este partea mecanicii fluidelor care studiază echilibrul acestora, precum și interacțiunea lor cu alte fluide sau corpuri solide cu care acestea vin în contact. Fluidul își păstrează starea de repaus atunci când asupra sa acționează forțe de tip masic sau forțe de suprafață. Forțele de tip masic apar datorită existenței unor câmpuri exterioare fluidului, cum ar fi de exemplu, câmpul gravitațional, și intensitatea lor este proporțională cu masa fluidului asupra căruia acționează (de exemplu forța de greutate și forța de inerție). Forțele de suprafață sunt reprezentate de forțele de presiune și intensitatea lor este proporțională cu suprafața fluidului asupra căruia acționează.

Ecuatiile generale ale staticii fluidelor, numite și ecuațiile lui Euler, se scriu, în forma vectorială:

$$\frac{1}{\rho} \nabla p = \vec{f}_m \quad (2.1)$$

unde ρ este densitatea fluidului, p – presiunea iar \vec{f}_m reprezintă forța masică unitară (rezultanta forțelor masice pe unitatea de masă).

Pornind de la sistemul ecuațiilor generale și considerând forțele masice conservative se obține ecuația fundamentală a staticii fluidelor:

$$\frac{1}{\rho} dp + dU = 0 \quad (2.2)$$

unde U reprezintă potențialul forțelor masice.

În câmpul gravitațional, unde două din componentele forțelor masice unitare sunt nule, iar a treia este egală cu valoarea accelerației gravitaționale, ecuația fundamentală (2.2) capătă forma:

$$\int \frac{dp}{\rho} + gz = \text{const} \quad (2.3)$$

unde z este cota punctului considerat, față de nivelul de referință.

Această relație exprimă de fapt, principiul conservării energiei, care spune că în orice punct al unui fluid aflat în repaus absolut, suma dintre energia de presiune și energia de poziție este constantă.

Relația (2.3) îmbracă forme diferite pentru lichide și pentru gaze.

În cazul fluidelor incompresibile (lichide), deoarece densitatea ρ poate fi considerată constantă și iese de sub integrală, relația (2.3) capătă forma:

$$P + \gamma z = \text{const.} \quad (2.4)$$

Această relație determină legea de distribuție a presiunilor, în interiorul unui lichid în repaus și se mai poate scrie ca:

$$p = p_0 + \gamma h \quad (2.5)$$

Adică, presiunea într-un punct din interiorul unui lichid aflat în repaus absolut este egală cu suma dintre presiunea atmosferică, p_0 și presiunea exercitată de coloana de lichid de înălțime h , aflată deasupra punctului considerat.

În cazul gazelor, densitatea nu mai poate fi considerată constantă. Se poate eventual lucra cu valori medii pe intervale de presiune.

În cazul echilibrului relativ al fluidelor, adică atunci când fluidul se află în repaus într-un rezervor care este în mișcare, ecuația fundamentală capătă forma:

$$p = p_0 + \gamma \left(h - z + \frac{\omega^2 r^2}{2g} \right) \quad (2.6)$$

dacă vasul este cilindric, de rază R și se află în mișcare de rotație cu viteza unghiulară ω (r este raza punctului în care se calculează presiunea), sau:

$$p = p_0 + \rho \left[a \left(\frac{b}{2} - y \right) + g(h_0 - z) \right] \quad (2.7)$$

dacă vasul este prismatic, de lățime b și se află în mișcare de translație cu accelerația a (h_0 este nivelul inițial al lichidului din rezervor, y și z sunt coordonatele punctului în care se calculează presiunea).

Cea mai importantă consecință a relației (2.3) este aceea că într-un lichid în repaus, planele orizontale sunt plane izobare și reciproc, aceasta constituind lema fundamentală a staticii, care stă la baza rezolvării a numeroase aplicații practice.

Aplicații

Probleme rezolvate

- 2.1** Să se determine denivelările Δh_1 și Δh_2 ale pistoanelor rezervorului plin cu apă din figura 2.1, dacă secțiunile transversale ale acestora sunt: $S_1=0,5 \text{ m}^2$, $S_2=0,2 \text{ m}^2$ și $S_3=0,05 \text{ m}^2$, iar forțele aplicate sunt $P_1=300 \text{ N}$, $P_2=250 \text{ N}$, $P_3=100 \text{ N}$.

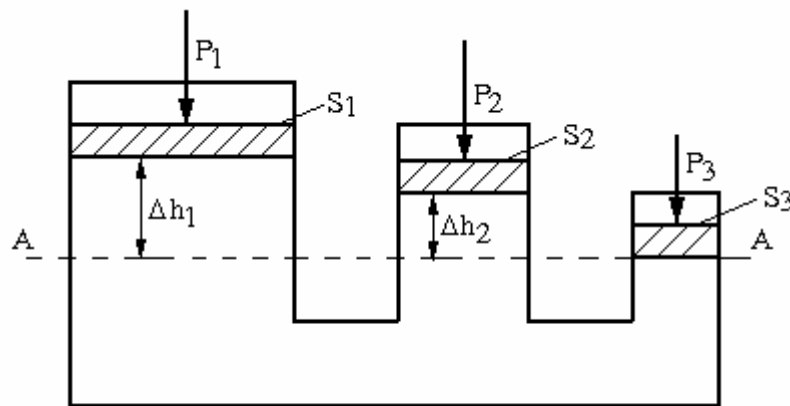


Figura 2.1.

Soluție

Conform lemei fundamentale a staticii, planul orizontal $A - A$ este un plan izobar, adică în orice punct al său presiunea este aceeași. Prin urmare, ținând cont de relația (2.4) putem scrie șirul de egalități:

$$\frac{P_1}{S_1} + \gamma \Delta h_1 = \frac{P_2}{S_2} + \gamma \Delta h_2 = \frac{P_3}{S_3}$$

Considerând aceste egalități două câte două, rezultă:

$$\Delta h_1 = \left(\frac{p_3}{S_3} - \frac{p_1}{S_1} \right) \frac{1}{\gamma} = \left(\frac{100}{0,05} - \frac{300}{0,5} \right) \frac{1}{9810} = 0,1427m$$

$$\Delta h_2 = \left(\frac{p_3}{S_3} - \frac{p_2}{S_2} \right) \frac{1}{\gamma} = \left(\frac{100}{0,05} - \frac{250}{0,2} \right) \frac{1}{9810} = 0,0765m$$

- 2.2.** Până la ce înălțime h se poate ridica benzina, prin mișcarea lentă a pistonului din figura 2.2, dacă presiunea vaporilor de benzină este $p_v=0,12$ at, densitatea benzinei este $\rho_b=742$ kg/m³, iar presiunea atmosferică este $p_0=750$ mmHg.

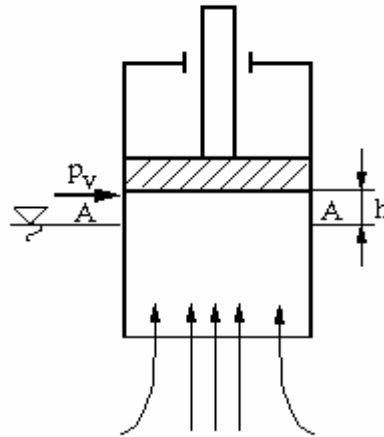


Figura 2.2.

Soluție

Prin ridicarea pistonului, în spatele său se creează o depresiune (o presiune mai mică decât presiunea atmosferică) care conduce la intrarea benzinei în cilindru. Teoretic, benzina ar trebui să urcă în cilindru până când presiunea exercitată de coloana de lichid, adică $\rho_b g h$ devine egală cu presiunea atmosferică. În realitate însă, în zona de contact benzină-piston se formează un interstițiu fin de vapori de benzină, cu presiunea p_v . Prin urmare, benzina urcă în cilindru până când este îndeplinită relația:

$$p_0 = p_v + \rho_b g h$$

adică:

$$h = (p_0 - p_v) / \rho_b g$$

unde:

$$p_0 = 750 \text{ mmHg} = 750 \cdot 133,322 = 99991,5 \text{ Pa}$$

$$p_v = 0,12 \text{ at} = 0,12 \cdot 9,81 \cdot 10^4 = 11772 \text{ Pa}$$

Rezultă:

$$h = (99991,5 - 11772) / 742 \cdot 9,81 = 12,11 \text{ m}$$

- 2.3.** Unui rezervor cu alcool i se atașează două tuburi piezometrice închise, unul cu alcool, celălalt cu mercur, ca în figura 2.3. Cunoscând denivelarea mercurului $\Delta h=0,4$ m și presiunea vaporilor saturați de alcool $p_{al}=0,12$ at, să se determine denivelările x și y , dacă presiunea indicată de manometrul M este $p_M=0,35$ at, iar densitățile relative ale alcoolului și mercurului sunt 0,9 și 13,596. Se neglijează presiunea vaporilor de mercur.

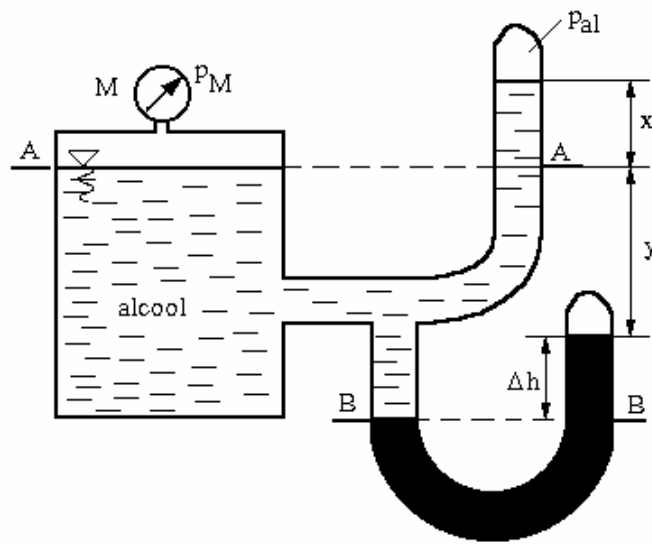


Figura 2.3.

Soluție

Planul orizontal A – A fiind izobar, putem scrie conform relației (2.4)

$$p_M = p_{al} + \gamma_{al} \cdot x$$

Rezultă:

$$x = (p_M - p_{al}) / \gamma_{al} = (34335 - 11772) / 8829 = 2,55 \text{ m}$$

unde:

$$p_M = 0,35 \text{ at} = 0,35 \cdot 9,81 \cdot 10^4 = 34335 \text{ Pa}$$

$$p_{al} = 0,12 \text{ at} = 0,12 \cdot 9,81 \cdot 10^4 = 11772 \text{ Pa}$$

$$\gamma_{al} = \rho_{al} \cdot g = 900 \cdot 9,81 = 8829 \text{ N/m}^2$$

$$\rho_{al} / \rho_{H_2O} = 0,9;$$

$$\rho_{al} = 0,9 \cdot 1000 = 900 \text{ kg/m}^3$$

Planul orizontal B – B fiind izobar, putem scrie, conform relației (2.4):

$$p_M + \gamma_{al}(y + \Delta h) = \gamma_{Hg} \Delta h$$

Rezultă:

$$y = \frac{\gamma_{Hg} \Delta h - p_M}{\gamma_{al}} - \Delta h = \frac{133376,76 \cdot 0,4 - 34335}{8829} - 0,4 = 1,75 \text{ m}$$

unde:

$$\gamma_{Hg} = \rho_{Hg} \cdot g = 13596 \cdot 9,81 = 133376,76 \text{ N/m}^3$$

$$\rho_{Hg} / \rho_{H_2O} = 13,596; \quad \rho_{Hg} = 13,596 \cdot 1000 = 13596 \text{ kg/m}^3$$

- 2.4.** Rezervorul tronconic din figura 2.4, cu dimensiunile $D=1\text{m}$, $H=1,5\text{m}$ și $\alpha=35^\circ$ este umplut cu apă până la înălțimea $h_0=0,4\text{m}$, apoi este rotit uniform, în jurul axei sale verticale. Să se determine turația maximă n_1 , pentru care lichidul nu curge din rezervor, precum și turația maximă n_2 pentru care lichidul părăsește în întregime rezervorul.

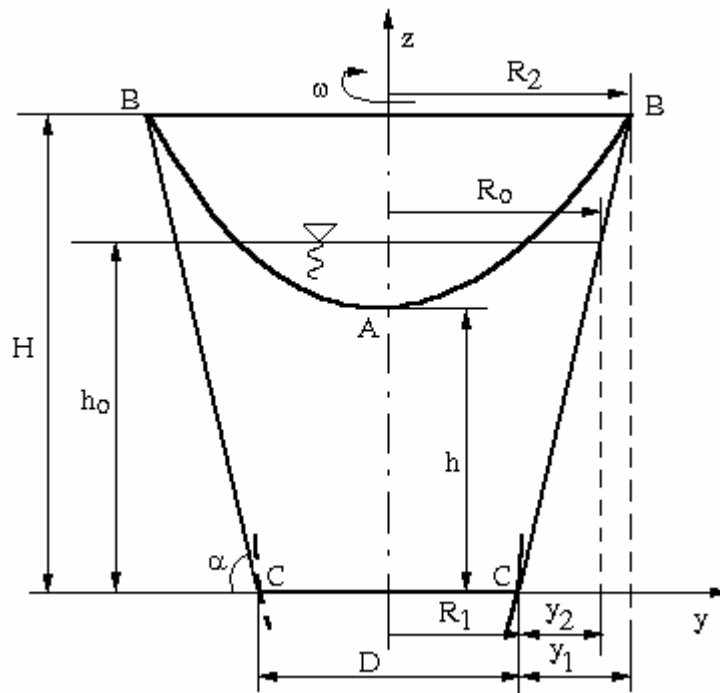


Figura 2.4.

Soluție

În timpul mișcării de rotație a recipientului, suprafața lichidului capătă forma unui paraboloid de rotație, de ecuație:

$$z - (\omega^2 r^2)/2g = C$$

Pentru determinarea constantei de integrare, C, se pun condițiile la limită în punctele A și B și anume:

- în punctul A, $r = 0$ și $z = h$, adică $C = h$;
- în punctul B, $r = R_2$ și $z = H$, adică $C = H - (\omega^2 R_2^2)/2g$

unde:

$$R_2 = D/2 + y_1 = D/2 + H \text{ctg} \alpha = 1/2 + 1,5 \text{ctg} 35 = 2,642 \text{ m}$$

Rezultă:

$$C = h = 1,5 - (2,642^2 \omega^2)/2 \cdot 9,81 = 1,5 - 0,356 \omega^2$$

Pentru a determina turația maximă n_1 , pentru care lichidul nu curge din rezervor, se observă că volumul gol BAB, mărginit de paraboloid, este egal cu volumul gol inițial (volumul lichidului rămâne același) adică:

$$\frac{1}{2} \pi R_2^2 (H - h) = \frac{\pi}{3} (H - h_0) (R_2^2 - R_2 R_0 + R_0^2)$$

unde:

$$R_0 = \frac{D}{2} + y_2 = \frac{D}{2} + h_0 \text{ctg} \alpha = \frac{1}{2} + 0,4 \text{ctg} 35 = 1,07 \text{ m}$$

Rezultă:

$$h = H - \frac{2(H - h_0)(R_2^2 - R_2 R_0 + R_0^2)}{3R_2^2} = 1,5 - \frac{2(1,5 - 0,4)(2,642^2 - 2,642 \cdot 1,07 + 1,07^2)}{3 \cdot 2,642^2} = 0,55 \text{ m}$$

Se obține deci: $C = h = 1,5 - 0,356 \omega_1^2 = 0,55 \text{ m}$

de unde

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{1,5 - 0,95}{0,356}} = 1,63 \text{ rad/s}$$

Turația n_1 , la care lichidul nu curge din rezervor este:

$$n_1 = 30\omega_1/\pi = 30 \cdot 1,63/\pi = 15,59 \text{ rot/min}$$

Pentru a determina turația n_2 , pentru care lichidul părăsește complet rezervorul, se face observația că, atunci când vasul se golește complet, paraboloidul suprafeței libere trece prin C și C' și este tangent la suprafața laterală a rezervorului tronconic, adică:

$$\left. \frac{dz}{dr} \right|_C = \left. \frac{\omega_2^2 r}{g} \right|_{r=R_1} = \operatorname{tg} \alpha$$

Prin urmare

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{g \cdot \operatorname{tg} \alpha}{R_1}} = \sqrt{\frac{9,81 \cdot \operatorname{tg} 35}{0,5}} = 3,7 \text{ rad/sec}$$

Rezultă:

$$n_2 = 30\omega_2/\pi = 30 \cdot 3,7/\pi = 35,39 \text{ rot/min}$$

- 2.5.** Un rezervor prismatic, de lățime b , conține până la cota h_0 , un lichid cu densitatea ρ ca în figura 2.5. Considerând că rezervorul are o mișcare de translație, cu accelerația a , să se determine ecuația suprafeței libere.

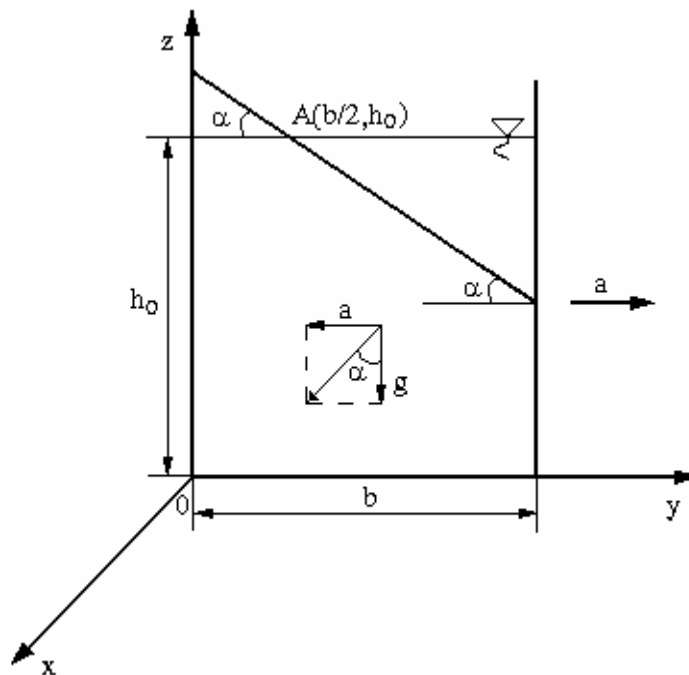


Figura 2.5.

Soluție

Se consideră sistemul de axe mobil $Qxyz$, legat de rezervor. Componentele forței masice și forței de inerție unitare sunt:

$$X = 0; Y = 0; Z = -g; X_i = 0; Y_i = -a; Z_i = 0.$$

Diferențiala funcției potențial este, în acest caz:

$$dU = -[(X + X_i)dx + (Y + Y_i)dy + (Z + Z_i)dz] = -[-ady - gdz]$$

Prin integrare se obține:

$$U = -\int(-ady - gdz) = ay + gz + C$$

Deoarece suprafața liberă este suprafață echipotențială, adică $U = \text{const.}$ în orice punct al ei (o altă consecință a ecuației fundamentale a staticii), rezultă

$$ay + gz = C_1$$

Constanta C_1 se determină observând că punctul A ($y=b/2, z=h_0$) rămâne în aceeași poziție atât în timpul repausului, cât și în timpul mișcării rectilinii a rezervorului, adică:

$$C_1 = ab/2 + gh_0$$

Rezultă ecuația suprafeței libere a lichidului, în timpul deplasării rezervorului, de forma:

$$ay + gz = ab/2 + gh_0$$

sau

$$ay + g(z - h_0) - ab/2 = 0$$

Aceasta este ecuația unei drepte cu panta:

$$\text{tg } \alpha = \frac{dz}{dy} = \frac{d\left(\frac{ab}{2} + gh_0 - ay\right)}{dy} = -\frac{a}{g}$$

Probleme propuse

- 2.6. Două vase deschise, conținând lichide nemiscibile cu greutatea specifică diferite ($\gamma_a = 7000 \text{ N/m}^3$ și $\gamma_b = 12000 \text{ N/m}^3$), sunt puse în legătură ca în figura 2.6. Să se determine înălțimile h_a și h_b , dacă denivelarea dintre suprafețele libere ale celor două vase este $\Delta h = 40 \text{ cm}$.

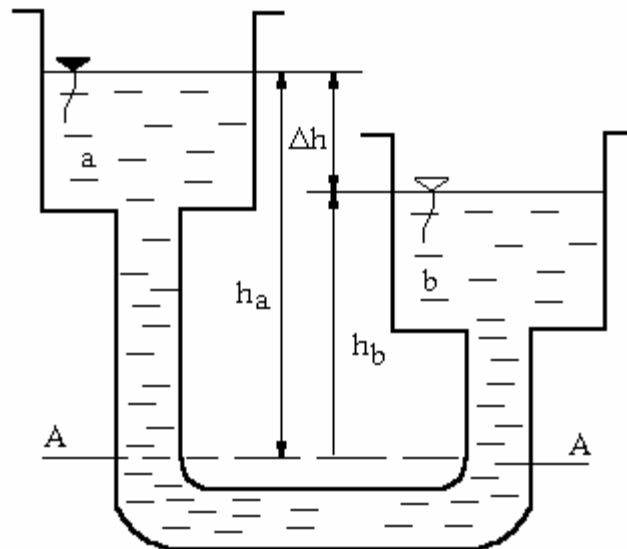


Figura 2.6.

- 2.7. Un clopot cilindric de diametru $D = 10 \text{ m}$ și înălțime $H = 5 \text{ m}$, ca în fig. 2.7, se scufundă în apă. Să se determine cota x la care se ridică apa în interiorul clopotului și adâncimea y , dacă masa acestuia este $m = 27 \text{ t}$. Presiunea atmosferică se admite $p_a = 1 \text{ at}$.

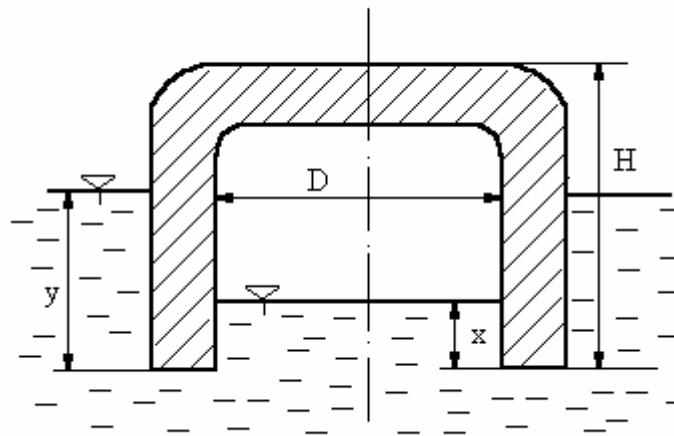


Figura 2.7.

- 2.8. Un rezervor cilindric, având masa $m_1=120$ kg, conține o cantitate de apă de masă $m_2=150$ kg, în care plutește un corp de masă $m_3=30$ kg (Fig. 2.8). Să se determine adâncimea x_1 la care se afundă rezervorul, când acesta este scufundat în apă, dacă nivelul apei în rezervor este $x_2=4$ m.

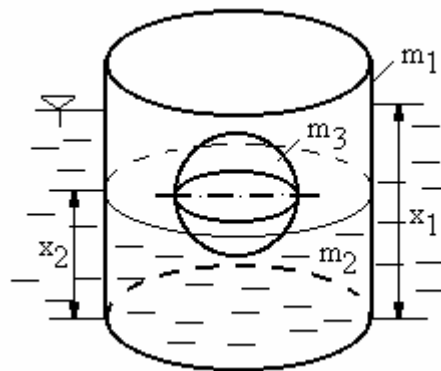


Figura 2.8.

CAPITOLUL 3

CINEMATICA FLUIDELOR

Noțiuni teoretice

Pentru descrierea mișcării fluidelor sunt necesare unele noțiuni utilizate atât în conceperea modelelor matematice, cât și pentru înțelegerea sensului lor fizic. Prezentarea acestor noțiuni începe, în mod necesar, cu elemente de cinematică deoarece la fluide, mai mult decât în cazul altor corpuri, caracteristica generală este deformația, ca formă a mișcării, iar exprimarea vitezei și accelerației în diferite puncte caracteristice din fluid reprezintă un interes cu totul special.

Mișcarea particulelor fluide se exprimă cu ajutorul unor sisteme de reprezentare. În hidraulică se folosesc sistemul Lagrange și sistemul Euler.

La sistemul Lagrange, variabilele sunt atașate particulelor fluide, în timp ce la sistemul Euler variabilele sunt atașate punctelor din domeniul de mișcare.

În cazul mișcării fluidelor rămâne valabilă, în particular, teorema Cauchy – Helmholtz din mecanica clasică, care se enunță astfel:

Fie un punct $A(x_1, x_2, x_3)$, aparținând unui domeniu de fluid $D(t)$ și un punct M , dintr-o vecinătate mică a lui A , de coordonate:

$$M(x_1 + X_1, x_2 + X_2, x_3 + X_3).$$

Viteza punctului M este:

$$\vec{V}_M = \vec{V}_A + \vec{\omega}_A \times \vec{AM} + \nabla \phi \quad (3.1)$$

unde: \vec{V}_A este viteza de translație a punctului A ; $\vec{\omega} \times \vec{AM}$ este viteza de rotație a lui M în jurul lui A ; $\nabla \phi$ este viteza de deformație; $\vec{\omega}_A$ reprezintă vectorul vârtej în A , iar Φ este o funcție scalară sau vectorială care reprezintă proprietățile mișcării și se calculează cu relația:

$$\Phi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a_{ij} X_i X_j = a_{11} X_1^2 + a_{22} X_2^2 + a_{33} X_3^2 + 2(a_{12} X_1 X_2 + a_{23} X_2 X_3 + a_{13} X_1 X_3) \quad (3.2)$$

Funcția Φ se atașează **tensorului viteză de deformație** \vec{D}_V , ale cărui componente, în cartezian, reprezintă vitezele de deformație unghiulară:

$$a_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (3.3)$$

Tensorul \vec{D}_V este simetric, adică:

$$a_{12} = a_{21}; \quad a_{13} = a_{31}; \quad a_{23} = a_{32}$$

Vectorul vârtej $\vec{\omega}$, reprezintă viteza unghiulară medie de rotație a unei particule în jurul centrului ei de greutate și este:

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot} \vec{v} \quad (3.4)$$

unde \vec{v} este viteza de translație a centrului de greutate al particulei.

Tensorul vârtej $\vec{\Omega}$, are componentele, în cartezian:

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (3.5)$$

și este asimetric, adică:

$$\omega_{21} = -\omega_{12}; \quad \omega_{32} = -\omega_{23}; \quad \omega_{31} = -\omega_{13}$$

Clasificarea mișcării fluidelor se poate face după mai multe criterii și anume: a) după desfășurarea în spațiu a mișcării, pot fi mișcări spațiale (tridimensionale), mișcări plane (bidimensionale) sau mișcări liniare (unidimensionale); b) după variația în timp a parametrilor mișcării, pot fi mișcări permanente (staționare), în care viteza nu variază în timp sau mișcări nepermanente (nestaționare), cu cazul particular al mișcării cvasipermanente (cvasistaționare), în care viteza variază în timp numai ca mărime, nu și ca direcție; c) după tipul câmpului vitezelor, pot fi mișcări potențiale, pentru care există o funcție scalară ϕ , numită potențialul vitezelor, astfel încât $\vec{v} = \text{grad } \phi$, sau mișcări nepotențiale.

În mecanica fluidelor, expresia matematică a principiului conservării masei, poartă numele de ecuație de continuitate, a cărei formă vectorială este:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0 \quad (3.6)$$

Aplicații

Probleme rezolvate

3.1. În raport cu un reper cartezian, viteza unui fluid este:

$$\vec{v} = x_1^2 x_2 \vec{i}_1 + x_1 x_2^2 \vec{i}_2 + x_2 x_3 \vec{i}_3$$

În punctul A(1,1,1) ca vârf, se consideră un cub cu muchia α , ca în figura 3.1.

Se cere să se determine viteza în vârful opus M al cubului, în două variante:

a) folosind relația: $\vec{v} = v_1 \vec{i}_1 + v_2 \vec{i}_2 + v_3 \vec{i}_3$;

b) folosind relația: $\vec{v}_M = \vec{v}_A + \vec{\omega}_A \times \vec{AM} + \nabla \phi$

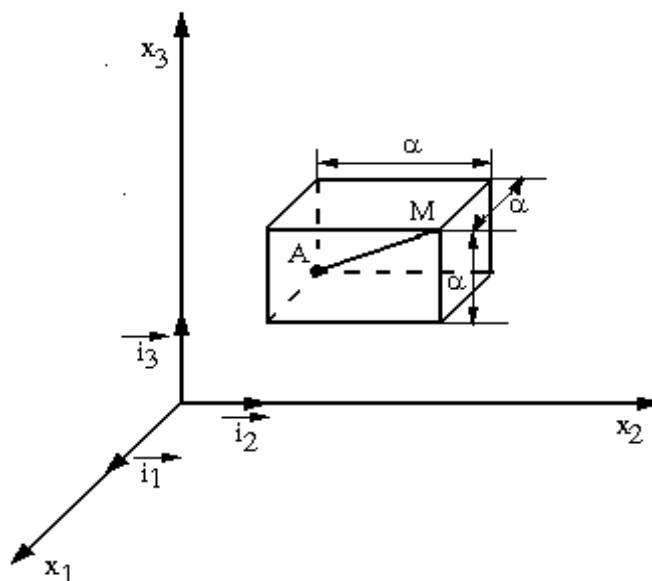


Figura 3.1.

Soluție

a) Se identifică componentele v_1, v_2, v_3 ale vitezei, în relația dată. Rezultă:

$$v_1 = x_1^2 x_2; \quad v_2 = x_1 x_2^2; \quad v_3 = x_2 x_3.$$

Se calculează viteza punctului $M(1+\alpha, 1+\alpha, 1+\alpha)$ cu relația din enunț:

$$\vec{v}_M = (1+\alpha)^2 (1+\alpha) \vec{i}_1 + (1+\alpha)(1+\alpha) \vec{i}_2 + (1+\alpha)(1+\alpha) \vec{i}_3 = (1+\alpha)^3 \vec{i}_1 + (1+\alpha)^3 \vec{i}_2 + (1+\alpha)^2 \vec{i}_3$$

b) Se evaluează fiecare termen al relației Cauchy-Helmholtz

$$\vec{v}_A = x_1^2 x_2 \vec{i}_1 + x_1 x_2^2 \vec{i}_2 + x_2 x_3 \vec{i}_3 = \vec{i}_1 + \vec{i}_2 + \vec{i}_3$$

$$\vec{\omega}_A = \frac{1}{2} \text{rot} \vec{v}_A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \vec{i}_1 & \vec{i}_2 & \vec{i}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ x_1^2 x_2 & x_1 x_2^2 & x_2 x_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} [x_3 \vec{i}_1 + (x_2^2 - x_1^2) \vec{i}_3] = \frac{1}{2} \cdot 1 \vec{i}_1 + \frac{1}{2} (1-1) \vec{i}_3 = \frac{1}{2} \vec{i}_1$$

$$\vec{AM} = \alpha \vec{i}_1 + \alpha \vec{i}_2 + \alpha \vec{i}_3$$

$$\vec{\omega}_A \times \vec{AM} = \begin{vmatrix} \vec{i}_1 & \vec{i}_2 & \vec{i}_3 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \alpha & \alpha & \alpha \end{vmatrix} = -\frac{\alpha}{2} \vec{i}_2 + \frac{\alpha}{2} \vec{i}_3 = \frac{\alpha}{2} (\vec{i}_3 - \vec{i}_2)$$

Φ_A se calculează cu relațiile (3.2) și (3.3), unde:

$$a_{11}^A = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \right) = \frac{1}{2} (2x_1 x_2 + 2x_1 x_2) = 2x_1 x_2 \Big|_A = 2$$

$$a_{22}^A = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) = \frac{1}{2} (2x_1 x_2 + 2x_1 x_2) = 2x_1 x_2 \Big|_A = 2$$

$$a_{33}^A = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \right) = \frac{1}{2} (x_2 + x_2) = x_2 \Big|_A = 1$$

$$a_{12}^A = a_{21}^A = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right) = (x_1^2 + x_2^2) \Big|_A = 1$$

$$a_{13}^A = a_{31}^A = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right) = 0$$

$$a_{23}^A = a_{32}^A = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \right) = \frac{1}{2} x_3 \Big|_A = \frac{1}{2}$$

$$X_1 = X_2 = X_3 = \alpha$$

$$\begin{aligned} \phi_A &= a_{11} X_1^2 + a_{22} X_2^2 + a_{33} X_3^2 + 2(a_{12} X_1 X_2 + a_{13} X_1 X_3 + a_{23} X_2 X_3) = \\ &= 2\alpha^2 + 2\alpha^2 + \alpha^2 + 2\left(\alpha^2 + \frac{1}{2}\alpha^2\right) = 8\alpha^2 \end{aligned}$$

$$\nabla \phi_A = \frac{\partial \phi_A}{\partial x_1} \vec{i}_1 + \frac{\partial \phi_A}{\partial x_2} \vec{i}_2 + \frac{\partial \phi_A}{\partial x_3} \vec{i}_3 = (a_{11}^A X_1 + a_{12}^A X_2 + a_{13}^A X_3) \vec{i}_1 +$$

$$(a_{21}^A X_1 + a_{22}^A X_2 + a_{23}^A X_3) \vec{i}_2 + (a_{31}^A X_1 + a_{32}^A X_2 + a_{33}^A X_3) \vec{i}_3 = 3\alpha \vec{i}_1 + 3,5\alpha \vec{i}_2 + 1,5\alpha \vec{i}_3$$

Rezultă:

$$\begin{aligned} \vec{v}_M &= \vec{v}_A + \vec{\omega}_A \times \vec{AM} + \nabla \phi = \vec{i}_1 + \vec{i}_2 + \vec{i}_3 + \frac{\alpha}{2} (\vec{i}_3 - \vec{i}_2) + 3\alpha \vec{i}_1 + 3,5\alpha \vec{i}_2 + 1,5\alpha \vec{i}_3 = \\ &= (1+3\alpha) \vec{i}_1 + (1+3\alpha) \vec{i}_2 + (1+2\alpha) \vec{i}_3 \end{aligned}$$

3.2. Se dă câmpul staționar de viteze, din mișcarea unui fluid, prin relația:

$$\vec{v} = x_1 x_2^2 \vec{i}_1 + x_1^2 x_2 \vec{i}_2 + x_3 (x_1^2 + x_2^2) \vec{i}_3$$

unde x_1, x_2, x_3 sunt coordonatele carteziene.

Se cere:

- Determinarea tensorului viteză de deformație, \vec{D}_v ;
- Determinarea vectorului vârtej, $\vec{\omega}$ și a tensorului vârtej, $\vec{\Omega}$;
- Verificarea relației: $\vec{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot} \vec{v}$;
- Viteza și accelerația fluidului în punctul A(1,2,2).

Soluție

a) Din relația câmpului vitezelor, rezultă:

$$v_1 = x_1 x_2^2; \quad v_2 = x_1^2 x_2 \quad v_3 = x_3 (x_1^2 + x_2^2).$$

Componentele tensorului \vec{D}_v se calculează cu relația (3.3)

$$a_{11} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial(x_1 x_2^2)}{\partial x_1} + \frac{\partial(x_1 x_2^2)}{\partial x_1} \right) = \frac{1}{2} (x_2^2 + x_2^2) = x_2^2$$

$$a_{22} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial(x_1^2 x_2)}{\partial x_1} + \frac{\partial(x_1^2 x_2)}{\partial x_1} \right) = \frac{1}{2} (x_1^2 + x_1^2) = x_1^2$$

$$a_{33} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial(x_1^2 x_3 + x_2^2 x_3)}{\partial x_3} + \frac{\partial(x_1^2 x_3 + x_2^2 x_3)}{\partial x_3} \right) = x_1^2 + x_2^2$$

$$a_{12} = a_{21} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial(x_1 x_2^2)}{\partial x_2} + \frac{\partial(x_1^2 x_2)}{\partial x_1} \right) = \frac{1}{2} (2x_1 x_2 + 2x_1 x_2) = 2x_1 x_2$$

$$a_{13} = a_{31} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial(x_1 x_2^2)}{\partial x_3} + \frac{\partial(x_1^2 x_3 + x_2^2 x_3)}{\partial x_1} \right) = \frac{1}{2} \cdot 2x_1 x_3 = x_1 x_3$$

$$a_{23} = a_{32} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial(x_1^2 x_2)}{\partial x_3} + \frac{\partial(x_1^2 x_3 + x_2^2 x_3)}{\partial x_2} \right) = \frac{1}{2} \cdot 2x_2 x_3 = x_2 x_3$$

Deci, tensorul viteză de deformație este:

$$\vec{D}_v \rightarrow \begin{bmatrix} x_2^2 & 2x_1 x_2 & x_1 x_3 \\ 2x_1 x_2 & x_1^2 & x_2 x_3 \\ x_1 x_3 & x_2 x_3 & x_1^2 + x_2^2 \end{bmatrix}$$

b) Componentele tensorului $\vec{\Omega}$ se calculează cu relația (3.5)

$$\omega_{11} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial(x_1 x_2^2)}{\partial x_1} - \frac{\partial(x_1 x_2^2)}{\partial x_1} \right) = 0$$

$$\omega_{22} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial(x_1^2 x_2)}{\partial x_2} - \frac{\partial(x_1^2 x_2)}{\partial x_2} \right) = 0$$

$$\omega_{33} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial(x_1^2 x_3 + x_2^2 x_3)}{\partial x_3} - \frac{\partial(x_1^2 x_3 + x_2^2 x_3)}{\partial x_3} \right) = 0$$

$$\omega_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial(x_1 x_2^2)}{\partial x_2} - \frac{\partial(x_1^2 x_2)}{\partial x_1} \right) = \frac{1}{2} (2x_1 x_2 - 2x_1 x_2) = 0$$

$$\omega_{13} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial(x_1 x_2^2)}{\partial x_3} - \frac{\partial(x_1^2 x_3 + x_2^2 x_3)}{\partial x_1} \right) = \frac{1}{2} \cdot 2x_1 x_3 = x_1 x_3$$

$$\omega_{23} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial(x_1 x_2^2)}{\partial x_3} - \frac{\partial(x_1^2 x_3 + x_2^2 x_3)}{\partial x_2} \right) = \frac{1}{2} \cdot 2x_2 x_3 = x_2 x_3$$

$$\omega_{21} = -\omega_{12} = 0; \quad \omega_{31} = -\omega_{13} = -x_1 x_3; \quad \omega_{32} = -\omega_{23} = -x_2 x_3.$$

Deci, tensorul vârtej este:

$$\vec{\Omega} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & x_1 x_3 \\ 0 & 0 & x_2 x_3 \\ -x_1 x_3 & -x_2 x_3 & 0 \end{bmatrix}$$

c) Vectorul vârtej este:

$$\vec{\omega} = \omega_1 \vec{i}_1 + \omega_2 \vec{i}_2 + \omega_3 \vec{i}_3$$

unde:

$$\omega_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial(x_1^2 x_3 + x_2^2 x_3)}{\partial x_2} - \frac{\partial(x_1 x_2^2)}{\partial x_3} \right) = x_2 x_3$$

$$\omega_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial(x_1^2 x_2)}{\partial x_3} - \frac{\partial(x_1^2 x_3 + x_2^2 x_3)}{\partial x_1} \right) = -x_1 x_3$$

$$\omega_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial(x_1^2 x_2)}{\partial x_1} - \frac{\partial(x_1 x_2^2)}{\partial x_2} \right) = 0$$

Rezultă

$$\vec{\omega} = x_2 x_3 \vec{i}_1 - x_1 x_3 \vec{i}_2$$

Dar, conform definiției,

$$\begin{aligned} \vec{\omega} &= \frac{1}{2} \text{rot } \vec{v} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \vec{i}_1 & \vec{i}_2 & \vec{i}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ x_1 x_2^2 & x_1^2 x_2 & x_3(x_1^2 + x_2^2) \end{vmatrix} = \\ &= \frac{1}{2} \left[2x_2 x_3 \vec{i}_1 - 2x_1 x_3 \vec{i}_2 + (2x_1 x_2 - 2x_1 x_2) \vec{i}_3 \right] = x_2 x_3 \vec{i}_1 - x_1 x_3 \vec{i}_2 \end{aligned}$$

d) Viteza în punctul A(1,2,2) este:

$$\vec{v}_A = 1 \cdot 2^2 \cdot \vec{i}_1 + 1^2 \cdot 2 \cdot \vec{i}_2 + 2(1^2 + 2^2) \vec{i}_3 = 4\vec{i}_1 + 2\vec{i}_2 + 10\vec{i}_3$$

În normă, se obține:

$$\left\| \vec{v}_A \right\| = \sqrt{4^2 + 2^2 + 10^2} = \sqrt{120} = 10,95 \text{ m/s}$$

Accelerația în punctul A(1,2,2) este:

$$\vec{a} = a_1 \vec{i}_1 + a_2 \vec{i}_2 + a_3 \vec{i}_3$$

unde:

$$a_1^A = v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_1}{\partial x_3} = x_1 x_2^4 + 2x_1^3 x_2^2 \Big|_A = 1 \cdot 2^4 + 2 \cdot 1^3 \cdot 2^2 = 24$$

$$a_2^A = v_1 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_2}{\partial x_3} = 2x_1^2 x_2^3 + x_1^4 x_2 \Big|_A = 2 \cdot 1^2 \cdot 2^3 + 1^4 \cdot 2 = 18$$

$$a_3^A = v_1 \frac{\partial v_3}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_3}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = 2x_1^2 x_2^2 x_3 + 2x_1^2 x_2^2 x_3 + x_1^4 x_3 + x_2^4 x_3 + 2x_1^2 x_2^2 x_3 = \\ = 2 \cdot 1^2 \cdot 2^2 \cdot 2 + 2 \cdot 1^2 \cdot 2^2 \cdot 2 + 1^4 \cdot 2 + 2^4 \cdot 2 + 2 \cdot 1^2 \cdot 2^2 \cdot 2 = 82$$

Deci, accelerația în punctul A este:

$$\vec{a} = 24 \vec{i}_1 + 18 \vec{i}_2 + 82 \vec{i}_3$$

În normă, rezultă:

$$\left\| \vec{a} \right\| = \sqrt{24^2 + 18^2 + 82^2} = 87,31 \text{ m/s}^2$$

3.3. Se dă câmpul de viteze, în mișcarea unui fluid:

$$\vec{v} = x_1 x_2^2 \vec{i}_1 + x_1^2 x_2 \vec{i}_2 + x_3 (x_1^2 + x_2^2) \vec{i}_3$$

x_1, x_2, x_3 , fiind coordonatele carteziene.

Se cere să se determine tubul de curent care trece prin cercul:

$$(C): \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 - 9 = 0 \\ x_3 - 3 = 0 \end{cases}$$

Soluție

Fie $F(x_1, x_2, x_3, t) = 0$, ecuația carteziană a tubului de curent căutat.

Deoarece $v_1 = x_1 x_2^2$; $v_2 = x_1^2 x_2$; $v_3 = x_3 (x_1^2 + x_2^2)$, ecuația diferențială a tubului devine:

$$v_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial F}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial F}{\partial x_3} = 0$$

Adică:

$$x_1 x_2^2 \frac{\partial F}{\partial x_1} + x_1^2 x_2 \frac{\partial F}{\partial x_2} + x_3 (x_1^2 + x_2^2) \frac{\partial F}{\partial x_3} = 0$$

Aceasta este o ecuație diferențială liniară, omogenă, cu derivate parțiale de ordinul I. Soluționarea ei cu problema Cauchy dată în enunț se face astfel:

Se formează sistemul caracteristic asociat ecuației:

$$\frac{dx_1}{v_1(x_1, x_2, x_3, t)} = \frac{dx_2}{v_2(x_1, x_2, x_3, t)} = \frac{dx_3}{v_3(x_1, x_2, x_3, t)}$$

Adică

$$\frac{dx_1}{x_1 x_2^2} = \frac{dx_2}{x_1^2 x_2} = \frac{dx_3}{x_3 (x_1^2 + x_2^2)}$$

Se observă că acesta este chiar sistemul de ecuații asociat liniilor de curent care formează tubul. Se caută integrale prime independente ale sistemului caracteristic și anume:

$$a) \frac{dx_1}{x_1 x_2^2} = \frac{dx_2}{x_1^2 x_2}$$

Rezultă

$$x_1 dx_1 - x_2 dx_2 = 0, \text{ de unde prin integrare: } x_1^2 - x_2^2 = C_1$$

$$b) \frac{x_2 dx_1}{x_1 x_2^3} = \frac{x_1 dx_2}{x_1^3 x_2} = \frac{dx_3}{x_3 (x_1^2 + x_2^2)}$$

Rezultă:

$$x_3 (x_1^2 + x_2^2) (x_2 dx_1 + x_1 dx_2) - x_1 x_2 (x_1^2 + x_2^2) dx_3 = 0$$

sau, mai simplu:

$$\frac{d(x_1, x_2)}{x_1 x_2} = \frac{dx_3}{x_3}$$

Prin integrare, obținem

$$\ln C_2 x_1 x_2 = \ln x_3, \text{ adică } C_2 x_1 x_2 = x_3.$$

Se rezolvă sistemul format din cele două integrale prime și problema Cauchy dată în enunț, adică:

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = 9 \\ x_3 = 3 \\ x_1^2 - x_2^2 = C_1 \\ x_3 = C_2 x_1 x_2 \end{cases}$$

Rezultă:

$$C_1^2 + \frac{36}{C_2^2} - 81 = 0$$

Se înlocuiesc expresiile pentru C_1 și C_2 extrase din integralele prime, adică

$$C_1 = x_1^2 - x_2^2$$

$$C_2 = x_3 / x_1 x_2$$

Rezultă, ecuația carteziană a tubului de curent:

$$F(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2 - x_2^2)^2 + \frac{36 x_1^2 x_2^2}{x_3^2} - 81 = 0$$

Probleme propuse

3.4. Câmpul de viteze al unei mișcări plane permanente este dat de expresiile:

$$v_1 = 3x_2; v_2 = 2$$

Să se determine viteza și accelerația în punctul A ($x_1=3, x_2=5$) și să se scrie ecuația liniei de curent care trece prin acest punct.

3.5. Admițând aceeași viteză medie în toate cele trei ramificații din Fig. 3.2. să se determine aria A_2 și debitele Q_1 și Q_0 cunoscându-se $A_0=0,8 \text{ m}^2$; $A_1=0,45 \text{ m}^2$; $Q_2=80 \text{ l/s}$.

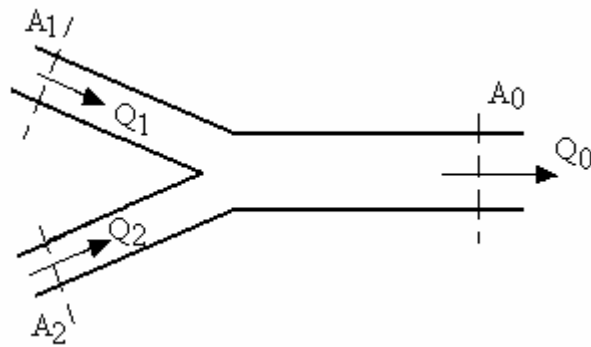


Figura 3.2.

3.6. O conductă cu diametrul $D=200$ mm are o zonă de strangulare de diametru $d=30$ mm (figura 3.3). Prin conductă curge un debit $Q=30$ l/s de petrol ($\rho_p=810$ kg/m³). Să se determine debitul masic Q_M , viteza medie v în conductă și viteza v_s în secțiunea stragulată.

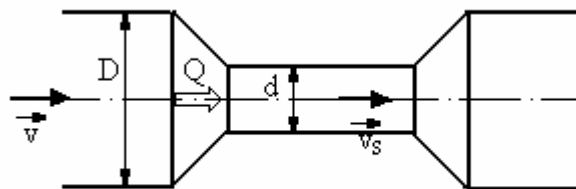


Figura 3.3.

CAPITOLUL 4

DINAMICA FLUIDELOR IDEALE

Noțiuni teoretice

Dinamica fluidelor este partea mecanicii fluidelor care studiază mișcarea acestora, precum și interacțiunea mecanică a fluidelor în mișcare, cu corpurile solide cu care acestea vin în contact. În acest capitol se consideră numai fluide ideale, adică fluide a căror vâscozitate este neglijabilă. În realitate, nu există fluide ideale, însă fluidele cu vâscozitate redusă pot fi încadrate în această categorie, modelul matematic fiind mai simplu.

Rezultatele obținute în studiul fluidului ideal (perfect) pot fi folosite, cu ajutorul unor coeficienți de corecție, în rezolvarea unor importante aplicații practice.

Ecuatiile de mișcare ale fluidului ideal, numite și **ecuațiile lui Euler**, sunt, în formă vectorială:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} = \vec{f} - \frac{1}{\rho} \nabla p \quad (4.1)$$

Dezvoltând termenul stâng al relației, acesta reprezentând de fapt accelerația centrului de masă al elementului de fluid, relația (4.1) se mai poate scrie sub forma vectorială cunoscută sub numele de **ecuațiile Gromeka-Lamb**:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{v^2}{2} \right) + \vec{\Omega} \times \vec{v} = \vec{f} - \frac{1}{\rho} \nabla p \quad (4.2)$$

În cartezian, ecuațiile de mișcare, atât în forma (4.1) cât și în forma (4.2) formează un sistem de trei ecuații cu cinci necunoscute: v_x, v_y, v_z, p și ρ . Prin urmare, pentru rezolvare mai sunt necesare două ecuații. O primă ecuație se consideră ecuația de continuitate scrisă sub forma (3.6). O a doua relație se obține admitând că mișcarea este barotropă, adică $\rho = \rho(p)$.

Integrarea sistemului format astfel este însă dificilă, datorită neliniarității ecuațiilor. Presupunând că forțele masice sunt conservative și mișcarea fluidului este barotropă și permanentă se obține soluția:

$$d \left(\frac{v^2}{2} \right) + \frac{dp}{\rho} = -dU \quad (4.3)$$

Integrând pentru lichide, unde $\rho = \text{const.}$ și funcția potențial are forma $U = gz + \text{const.}$, rezultă:

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = \text{const} \quad (4.4)$$

Această relație poartă numele de relația lui Bernoulli pentru lichide aflate în mișcare permanentă și exprimă, din punct de vedere energetic, principiul conservării energiei unității de masă fluidă.

Dacă relația (4.4) se împarte prin g , rezultă:

$$\frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} + z = \text{const} \quad (4.5)$$

unde $v^2/2g$ reprezintă energia cinetică raportată la unitatea de greutate; p/γ reprezintă energia potențială a forțelor de presiune, raportată la unitatea de greutate, iar z este energia potențială a forțelor exterioare (sau energia de poziție) raportată la unitatea de greutate.

În general, ecuația lui Bernoulli se aplică între două puncte aflate pe o linie de curent:

$$\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2 \quad (4.6)$$

În cazul gazelor, funcția potențial U este constantă, derivata ei este nulă, iar **ecuația lui Bernoulli pentru gaze** este:

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} = \text{const} \quad (4.7)$$

În multe cazuri practice, domeniul ocupat de un fluid în mișcare poate fi asimilat cu un tub de curent. În asemenea cazuri se utilizează relația lui Bernoulli generalizată, adică:

$$\frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 = \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2 \quad (4.8)$$

unde α_1, α_2 sunt coeficienții Coriolis introduși pentru a ține seama de neuniformitatea vitezelor medii v_1 și v_2 în secțiunile 1 și 2 ale tubului de curent. Relația (4.8) se utilizează numai pentru lichide, deoarece în cazul gazelor mărimile care caracterizează mișcarea sunt uniform distribuite pe secțiune.

Aplicații

Probleme rezolvate

- 4.1. O conductă tronconică, cu diametrul secțiunii inițiale $d=25$ mm, lungimea $L=0,1$ m și unghiul conului $\alpha=5^\circ$, ca în figura 4.1, transportă debitul de apă $Q=2$ l/s. Cunoscând înălțimea coloanei de apă din tubul piezometric conectat la secțiunea inițială, $h_1=100$ mm, să se determine înălțimea coloanei de apă din tubul piezometric plasat în secțiunea finală a conductei. Se neglijează pierderile de sarcină.

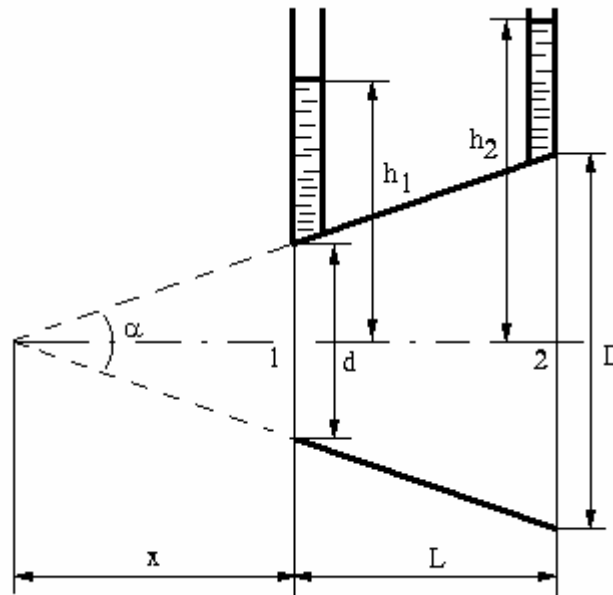


Figura 4.1.

Soluție

Se aplică relația lui Bernoulli, în forma (4.6), între punctele 1 și 2 pe linia de curent care coincide cu axa conductei. În acest caz, $z_1=z_2=0$

Rezultă:

$$\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma}$$

Ținând cont de relația (2.5), se poate scrie:

$$\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_0 + \gamma h_1}{\gamma} = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_0 + \gamma h_2}{\gamma}$$

Rezultă

$$h_2 = h_1 + \frac{v_1^2 - v_2^2}{2g}$$

Vitezele v_1 și v_2 se determină ținând cont de relația de definiție a debitului volumic și ecuația de continuitate:

$$Q = \frac{\pi d^2}{4} v_1 = \frac{\pi D^2}{4} v_2$$

Rezultă:

$$v_1 = \frac{4Q}{\pi d^2} = \frac{4 \cdot 2 \cdot 10^{-3}}{\pi (25 \cdot 10^{-3})^2} = 4,07 \text{ m/s}$$

unde:

$$Q = 2 \text{ l/s} = 2 \text{ dm}^3/\text{s} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$$

$$d = 25 \text{ mm} = 25 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$v_2 = \frac{4Q}{\pi D^2} = \frac{4 \cdot 2 \cdot 10^{-3}}{\pi (34 \cdot 10^{-3})^2} = 2,2 \text{ m/s}$$

unde:

$$D = 2 \left(L + \frac{d}{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} \right) \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \cong 2 \left(L + \frac{d}{2 \frac{\alpha}{2}} \right) \frac{\alpha}{2} = L\alpha + d = 100 \cdot 0,087 + 25 \cong 34 \text{ mm} = 34 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$\alpha = 5^\circ = \frac{5\pi}{180} = 0,087 \text{ rad}$$

Rezultă:

$$h_2 = 0,1 + \frac{4,07^2 - 2,2^2}{2 \cdot 9,81} \cong 0,7 \text{ m} = 700 \text{ mm}$$

4.2. Să se determine debitul Q și presiunea p în secțiunea A, necesare pentru ca apa care iese din ajutorul conic din figura 4.2, cu $d=8 \text{ mm}$, $D=40 \text{ mm}$, $h=0,45 \text{ m}$ să atingă înălțimea $H=7,4 \text{ m}$.

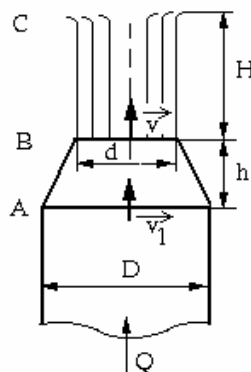


Figura 4.2.

Soluție

Pentru determinarea debitului, se scrie relația lui Bernoulli, între punctele B și C pe linia de curent care coincide cu axa conductei.

$$\frac{v_B^2}{2g} + \frac{p_B}{\gamma} = \frac{v_C^2}{2g} + \frac{p_C}{\gamma}$$

Ținând cont că: $v_B=v$; $v_C=0$ (dacă ar fi diferită de zero, apa ar urca mai sus); $p_B=p_0$ (presiunea atmosferică); $p_C=p_0+\gamma H$, rezultă:

$$\frac{v^2}{2g} + \frac{p_0}{\gamma} = \frac{p_0 + \gamma H}{\gamma}$$

de unde

$$v = \sqrt{2gH} = \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 7,4} = 12,05 \text{ m/s}$$

Rezultă debitul:

$$Q = v \frac{\pi d^2}{4} = 12,05 \frac{\pi \cdot 0,008^2}{4} = 6,05 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$$

Pentru determinarea presiunii p se scrie relația lui Bernoulli între punctele A și B pe linia de curent care coincide cu axa conductei:

$$\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_A}{\gamma} = \frac{v^2}{2g} + \frac{p_0 + \gamma h}{\gamma}$$

Rezultă:

$$p_A = \gamma \frac{v^2 - v_1^2}{2g} + p_0 + \gamma \cdot h = 9810 \frac{12,05^2 - 0,482^2}{2 \cdot 9,81} + 101325 + 9810 \cdot 0,45 = 178224,5 \text{ N/m}^2$$

unde v_1 se determină din ecuația de continuitate:

$$Q = \frac{\pi D^2}{4} \cdot v_1 = \frac{\pi d^2}{4} \cdot v, \text{ adică}$$

$$v_1 = \frac{d^2}{D^2} v = \frac{8^2}{40^2} \cdot 12,05 = 0,482 \text{ m/s}$$

- 4.3.** La ce presiune p_1 , în conducta orizontală de diametru $D=150$ mm, din figura 4.3, prin care curge debitul $Q=20$ l/s, de lichid cu densitatea $\rho=900$ kg/m³, apare pericolul de cavitație în zona îngustată de diametru $d=30$ mm, dacă presiunea de vaporizare este $p_v/\gamma=0,3$ m? Se neglijează pierderile de sarcină.

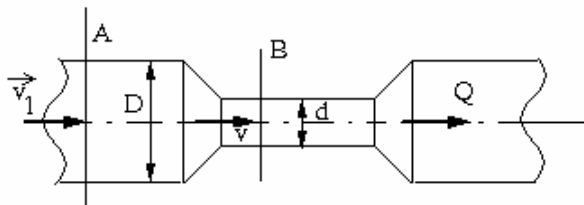


Figura 4.3.

Soluție

Se admite că în zona strangulată apare presiunea de vaporizare p_v și se scrie relația lui Bernoulli între secțiunile A și B, considerând ca nivel de referință, axa conductei.

$$\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} = \frac{v^2}{2g} + \frac{p_v}{\gamma}$$

Rezultă:

$$p_1 = \gamma \left(\frac{v^2 - v_1^2}{2g} + \frac{p_v}{\gamma} \right) = 9810 \left(\frac{28,29^2 - 1,13^2}{2 \cdot 9,81} + 0,3 \right) = 402466,6 \text{ N/m}^2$$

unde v_1 și v_2 se determină din ecuația de continuitate:

$$Q = \frac{\pi D^2}{4} \cdot v_1 = \frac{\pi d^2}{4} \cdot v, \text{ adică:}$$

$$v_1 = \frac{4Q}{\pi D^2} = \frac{4 \cdot 20 \cdot 10^{-3}}{\pi \cdot 0,15^2} = 1,13 \text{ m/s}$$

$$v_2 = \frac{4Q}{\pi d^2} = \frac{4 \cdot 20 \cdot 10^{-3}}{\pi \cdot 0,03^2} = 28,29 \text{ m/s}$$

$$Q = 20 \text{ l/s} = 20 \text{ dm}^3/\text{s} = 20 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$$

- 4.4. Să se determine debitul care curge prin sifonul din figura 4.4. și presiunea din punctul B, în ipoteza neglijării pierderilor de sarcină.

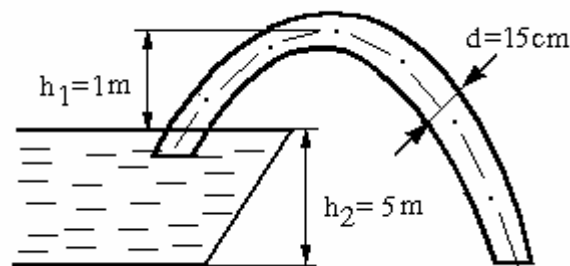


Figura 4.4.

Soluție

Se scrie relația lui Bernoulli între un punct de pe suprafața liberă a lichidului din rezervor (a cărui viteză de coborâre este practic nulă, datorită dimensiunilor mari ale rezervorului în comparație cu diametrul sifonului) și un punct la ieșirea din sifon, unde presiunea este egală cu presiunea atmosferică p_0 .

$$\frac{p_0}{\gamma} + h_2 = \frac{v^2}{2g} + \frac{p_a}{\gamma}$$

Rezultă, viteza v a apei în tubul sifon:

$$v = \sqrt{2gh_2} = \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 5} = 9,9 \text{ m/s}$$

Debitul sifonat este:

$$Q = \frac{\pi d^2}{4} v = \frac{\pi \cdot 0,15^2}{4} \cdot 9,9 = 0,175 \text{ m}^3/\text{s}$$

Pentru determinarea presiunii în punctul B, se scrie relația lui Bernoulli între acest punct și ieșirea sifonului:

$$\frac{v^2}{2g} + \frac{p_B + \gamma(h_1 + h_2)}{\gamma} = \frac{v^2}{2g} + \frac{p_0}{\gamma}$$

Rezultă:

$$p_B = p_0 - \gamma(h_1 + h_2) = 101325 - 9810(1+5) = 42465 \text{ N/m}^2$$

- 4.5. Să se stabilească viteza maximă pe care o are apa la ieșirea prin secțiunea 3 a tubului din figura 4.5, determinându-se în prealabil înălțimea H a acestuia, astfel încât în secțiunea 2 presiunea să nu scadă sub presiunea de vaporizare a apei. Se cunosc diametrele $D=0,5 \text{ m}$, $d=0,05 \text{ m}$, presiunea de vaporizare a apei la 20°C , $p_v/\gamma=0,24 \text{ mH}_2\text{O}$, presiunea atmosferică, $p_0/\gamma=10 \text{ mH}_2\text{O}$ și înălțimea rezervorului, $h=1 \text{ m}$.

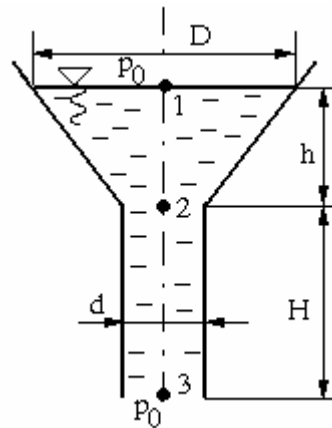


Figura 4.5

Soluție

Se scrie relația lui Bernoulli între punctele 1 și 3, pe linia de curent care coincide cu axa conductei:

$$\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_0 + \gamma(H + h)}{\gamma} = \frac{v_3^2}{2g} + \frac{p_0}{\gamma}$$

Din ecuația de continuitate:

$$Q = \frac{\pi D^2}{4} \cdot v_1 = \frac{\pi d^2}{4} \cdot v_3$$

rezultă:

$v_1 = v_3 \frac{d^2}{D^2}$, care se înlocuiește în relația lui Bernoulli scrisă anterior. Obținem:

$$\frac{v_3^2}{2g} \left(1 - \frac{d^4}{D^4} \right) = H + h$$

de unde:

$$v_3 = \sqrt{\frac{2g(H + h)}{1 - \frac{d^4}{D^4}}} \cong \sqrt{2g(H + h)}$$

deoarece $d^4/D^4=10^{-4}$, adică neglijabil.

Se observă că viteza $v_{3\max}$ se obține pentru înălțimea H_{\max} a tubului. Pentru determinarea acesteia se aplică relația lui Bernoulli între punctele 2 și 3:

$$\frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2 + \gamma H}{\gamma} = \frac{v_3^2}{2g} + \frac{p_0}{\gamma}$$

și se observă, din ecuația de continuitate că $v_2=v_3$.

Rezultă:

$$H=(p_0-p_2)/\gamma$$

Valoarea maximă a lui H se obține în cazul limită în care $p_2/\gamma=p_v/\gamma$.

Deci:

$$H_{\max} = \frac{P_0 - P_v}{\gamma} = 10 - 0,24 = 9,76 \text{ m}$$

Cu această valoare, viteza maximă este:

$$v_{\max} = \sqrt{2g(H_{\max} + h)} = \sqrt{2 \cdot 9,81(9,76 + 1)} = 14,53 \text{ m/s.}$$

Probleme propuse

- 4.6. Într-un tub orizontal de secțiune variabilă (figura 4.6), curge un lichid ideal având greutatea specifică $\gamma=0,98\gamma_{H_2O}$ și debitul $Q=20 \text{ l/s}$. Care sunt înălțimile piezometrice p_1/γ , p_2/γ , p_3/γ și p_4/γ , dacă se cunosc diametrele secțiunilor respective: $d_1=d_3=115 \text{ mm}$, $d_2=88 \text{ mm}$, $d_4=125 \text{ mm}$ și presiunea $p_1=3 \text{ at}$?

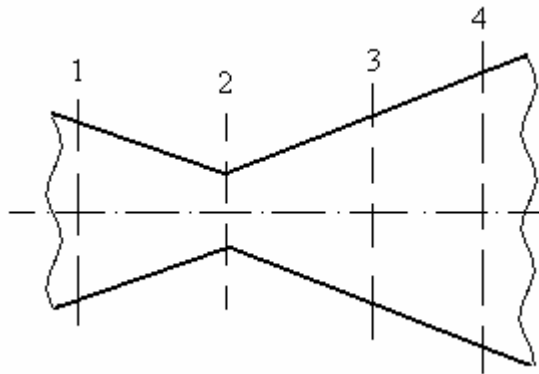


Figura 4.6.

- 4.7. Să se determine forța de solicitare axială a flanșei din figura 4.7, considerând greutatea apei și pierderile de sarcină ca fiind neglijabile. Se cunosc: $H=2 \text{ m}$; $d_1=50 \text{ mm}$; $d_2=100 \text{ mm}$; $d_3=30 \text{ mm}$; $\gamma_{ulei}=8000 \text{ N/m}^3$.

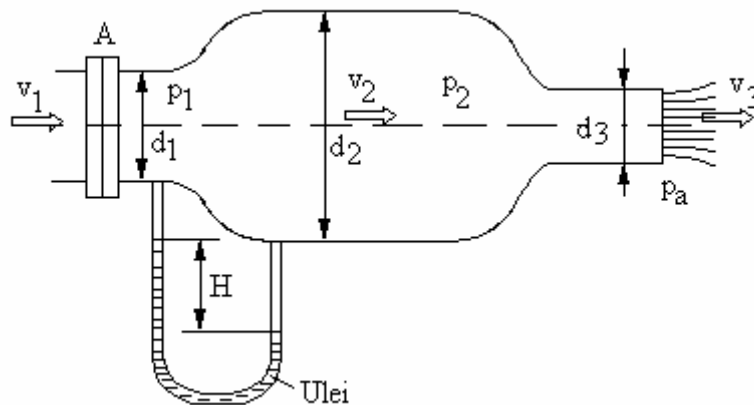


Figura 4.7.

CAPITOLUL 5

DINAMICA FLUIDELOR REALE ÎN MIȘCARE LAMINARĂ

Noțiuni teoretice

Curgerea fluidelor reale se poate produce în două regimuri de mișcare, diferite din punct de vedere al structurii acestora și anume **regimul laminar** și **regimul turbulent**.

Factorii care determină apariția unuia din cele două regimuri, la curgerea unui fluid printr-o conductă, sunt viteza medie de curgere a fluidului, v , diametrul conductei, d și vâscozitatea cinematică a fluidului, ν . Pentru caracterizarea regimului de curgere al fluidului se introduce mărimea adimensională Re , numită numărul lui Reynolds și definită ca:

$$Re = vd/\nu \quad (5.1)$$

Dacă mișcarea fluidului se realizează pentru o valoare a numărului lui Reynolds mai mică decât o valoare critică, $Re < Re_{cr}$, regimul de mișcare este totdeauna laminar. Dacă mișcarea fluidului are loc în condițiile în care $Re > Re_{cr}$, regimul de curgere este turbulent. La curgerea în conducte, $Re_{cr} = 2300$.

Ecuatiile de mișcare și metodele de studiu pentru cele două regimuri sunt esențial diferite.

În cazul cel mai general, mișcarea fluidelor reale, în regim laminar, este descrisă de **ecuațiile Navier-Stokes**:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v} \nabla \right) \vec{v} = \vec{f} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \vec{v} \quad (5.2)$$

Această relație reprezintă, în cartezian, un sistem de trei ecuații cu 4 necunoscute: componentele v_x , v_y , v_z ale vitezei și presiunea p .

Pentru rezolvarea lui, se atașează ecuația de continuitate, scrisă sub forma:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (5.3)$$

Rezolvarea exactă a sistemului este, în cele mai multe cazuri, imposibilă datorită neliniarității ecuațiilor, de aceea se folosesc metode aproximative cum ar fi metoda stratului limită, metoda diferențelor finite sau metoda similitudinii.

Soluții exacte se pot obține numai în cazul mișcărilor unidimensionale ale fluidelor newtoniene și incompresibile, în mișcare laminară, cum ar fi mișcarea între două plăci plane paralele, situate la distanța $2h$ una față de alta și înclinate cu unghiul α față de un plan orizontal, când se obține soluția de forma:

$$v(y) = \frac{1}{2\eta} \left(\frac{\Delta p}{l} - \rho p \sin \alpha \right) (h^2 - y^2) \quad (5.4)$$

care poartă numele de mișcarea Hagen și Poiseuille, sau mișcarea într-o conductă cilindrică circulară, a cărei secțiune dreaptă este un cerc de rază R_0 și a cărei axă este înclinată cu un unghi α față de un plan orizontal, când se obține soluția de forma:

$$v(x, y) = \frac{1}{4\eta} \left(\frac{\Delta p}{l} - \rho p \sin \alpha \right) (R_0^2 - R^2) \quad (5.5)$$

Aplicații

Probleme rezolvate

- 5.1.** Pentru amortizarea șocului provocat de forța de recul, un tun este prevăzut cu frână cataract, care constă dintr-un cilindru cu ulei și un piston prevăzut cu orificii circulare, de diametru d_0 , ca în figura 5.1. Cunoscând vâscozitatea uleiului, η , diametrul pistonului, D_0 , forța de recul, F și viteza v_p cu care se deplasează pistonul, să se determine numărul N al orificiilor circulare din pistonul cataractului, dacă pe fața superioară a pistonului presiunea este cea atmosferică.

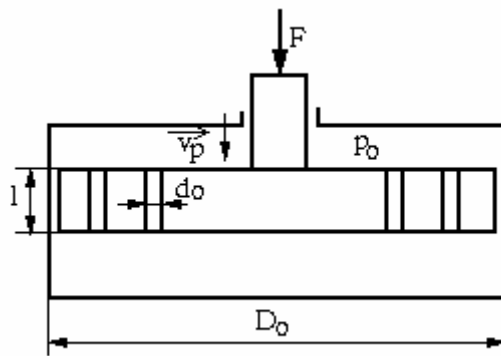


Figura 5.1.

Soluție

Forța F creează pe fața inferioară a pistonului presiunea:

$$p_1 = \frac{F}{\frac{\pi D^2}{4}} + p_0$$

Prin urmare, variația presiunii pe cele două fețe ale pistonului este:

$$\Delta p = p_1 - p_0 = \frac{4F}{\pi D^2}$$

Această variație de presiune produce o curgere laminară a uleiului, prin orificiile circulare, cu viteza dată de relația (5.5), în care $\alpha=0$, adică:

$$v = \frac{1}{4\eta} \frac{\Delta p}{l} (R_0^2 - R^2)$$

Pentru $R=0$, se obține viteza maximă:

$$v_{\max} = \frac{1}{4\eta} \frac{\Delta p}{l} R_0^2$$

iar pentru $R=R_0$, se obține viteza minimă $v_{\min}=0$.

Rezultă viteza medie

$$v = \frac{1}{8\eta} \frac{\Delta p}{l} R_0^2 = \frac{1}{8\eta} \frac{4F}{\pi D^2 l} \frac{d^2}{4} = \frac{F d^2}{8\pi D^2 \eta l}$$

Datorită faptului că $p_1 > p_0$, prin orificii urcă o anumită cantitate de ulei care face ca pistonul să coboare cu viteza v_p , care este legată de v prin ecuația de continuitate:

$$v \cdot N \cdot \frac{\pi d^2}{4} = v_p \cdot \frac{\pi D^2}{4} = Q$$

Rezultă numărul N al orificiilor:

$$N = \frac{v_p \frac{\pi D^2}{4}}{v \frac{\pi d^2}{4}} = \frac{v_p}{v} \left(\frac{D}{d} \right)^2 = v_p \left(\frac{d}{D} \right)^2 \frac{8\pi D^2 \eta l}{F d^2}$$

deci

$$N = 8\pi \eta \frac{l}{F} \frac{D^4}{d^4} v_p$$

- 5.2.** Pistonul din figura 5.2. împinge cu o forță utilă F uleiul în cilindru de rază R_0 și mai departe, printr-o conductă de lungime l și rază r_0 uleiul este golit într-un rezervor. Presupunând că mișcarea în cilindru și în conductă este laminară, să se determine timpul în care pistonul parcurge cursa L .

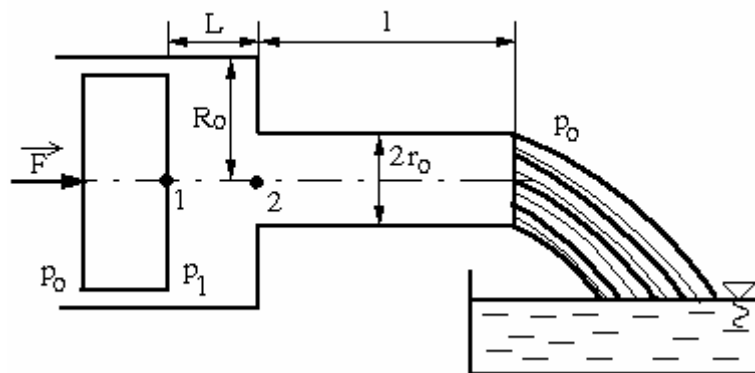


Figura 5.2.

Soluție

Din relația vitezei medii la mișcarea laminară într-o conductă circulară determinată la problema precedentă:

$$v_{med} = \frac{1}{8\eta} \frac{\Delta p}{l} R_0^2$$

rezultă debitul mediu:

$$Q = v \pi R_0^2 = \frac{1}{8\eta} \frac{\Delta p}{l} R_0^2 \pi R_0^2 = \frac{\pi}{8\eta} \frac{\Delta p}{l} R_0^4$$

De aici rezultă variația de presiune:

$$\text{În cilindru: } \Delta p_1 = p_1 - p_2 = \frac{8\eta L}{\pi R_0^4} Q$$

$$\text{În conductă: } \Delta p_2 = p_2 - p_0 = \frac{8\eta l}{\pi r_0^4} Q$$

Adunând cele două variații de presiune, se obține:

$$\Delta p = p_1 - p_0 = \frac{8\eta Q}{\pi} \left(\frac{L}{R_0^4} + \frac{l}{r_0^4} \right)$$

Această variație de presiune este produsă prin acțiunea forței F pe suprafața secțiunii cilindrului, adică:

$$\Delta p = p_1 - p_0 = F / \pi R_0^2$$

Egalând cele două relații pentru Δp , se obține debitul:

$$Q = \frac{F}{8\eta \left(\frac{L}{R_0^2} + \frac{R_0^2}{r_0^4} l \right)}$$

Volumul de lichid scurs în timpul dt este:

$$dv = Q dt,$$

de unde:

$$dt = \frac{dv}{Q} = \frac{\pi R_0^2 dL}{F} = \frac{8\eta \pi R_0^2 \left(\frac{L}{R_0^2} + \frac{R_0^2}{r_0^4} l \right)}{F} dL$$

Timpul în care pistonul parcurge întreaga cursă L se obține prin integrare:

$$T = \int dt = \frac{8\eta \pi R_0^2}{F} \int_0^L \left(\frac{L}{R_0^2} + \frac{R_0^2}{r_0^4} l \right) dL = \frac{8\eta \pi R_0^2}{F} \left(\frac{1}{R_0^2} \frac{L^2}{2} \Big|_0^L + \frac{R_0^2}{r_0^4} L \Big|_0^L \right) =$$

$$= \frac{8\eta \pi R_0^2}{F} \left(\frac{L^2}{2R_0^2} + \frac{R_0^2}{r_0^4} l L \right) = \frac{8\eta \pi L}{F} \left(\frac{R_0}{r_0} \right)^4 \left(\frac{L r_0^4}{2l R_0^4} + 1 \right) = \frac{8\eta \pi L}{F} \left(\frac{R_0}{r_0} \right)^4 \left[1 + \frac{L}{2l} \left(\frac{r_0}{R_0} \right)^4 \right]$$

- 5.3.** Un fluid incompresibil, de densitate ρ și vâscozitate η cunoscute, se află în mișcare plană laminară într-un difuzor plan cu un unghi de evazare foarte mic, ca în figura 5.3. Debitul de fluid pe unitatea de anvergură este q . Cunoscând h_1 , h_2 și l să se determine variația de presiune $\Delta p = p_1 - p_2$, între capetele difuzorului. Ce condiții trebuie să satisfacă unghiul β pentru ca rezultatul obținut să fie corect?

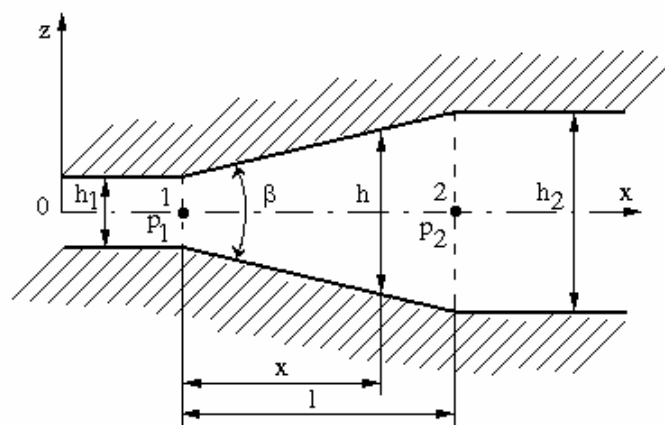


Figura 5.3.

Soluție

Debitul q între cei doi pereți paraleli este:

$$q = \int_0^h v dz$$

unde v se înlocuiește din relația (5.4), în care $\Delta p/l = dp/dx$ și $\alpha = 0$. Rezultă:

$$q = \int_0^h \frac{1}{2\eta} \frac{dp}{dx} (h^2 - z^2) dz = \frac{1}{2\eta} \frac{dp}{dx} \left(h^2 z \Big|_0^h - \frac{z^3}{3} \Big|_0^h \right) = \frac{1}{2\eta} \frac{dp}{dx} \left(h^3 - \frac{h^3}{3} \right) = \frac{h^3}{3\eta} \frac{dp}{dx}$$

Extinzând aplicabilitatea acestei relații la difuzorul plan, mărimile h și dp/dx sunt dependente de x deoarece:

$$h(x) = h_1 + \frac{h_2 - h_1}{l} x$$

Din relația debitului, variația presiunii este:

$$dp = \frac{3\eta q}{h^3(x)} dx = \frac{3\eta q}{\left(h_1 + \frac{h_2 - h_1}{l} x \right)^3} dx$$

Prin integrare se obține:

$$p_1 - p_2 = 3\eta q \int_0^l \frac{dx}{\left(h_1 + \frac{h_2 - h_1}{l} x \right)^3}$$

Pentru rezolvarea integralei, notăm $(h_2 - h_1)/l = k$ și ținem cont că $\int (ax + b)^n dx = \frac{(ax + b)^{n+1}}{(n+1)a} + c$.

Obținem:

$$\begin{aligned} p_1 - p_2 &= 3\eta q \int_0^l \frac{dx}{(h_1 + kx)^3} = 3\eta q \int_0^l (h_1 + kx)^{-3} dx = 3\eta q \frac{(h_1 + kx)^{-2}}{-2k} \Big|_0^l = \\ &= -\frac{3\eta q}{2k} \left[\frac{1}{(kl + h_1)^2} - \frac{1}{h_1^2} \right] = -\frac{3\eta ql}{2(h_2 - h_1)} \left[\frac{1}{\left(\frac{h_2 - h_1}{l} l + h_1 \right)^2} - \frac{1}{h_1^2} \right] = -\frac{3\eta ql}{2(h_2 - h_1)} \left(\frac{1}{h_2^2} - \frac{1}{h_1^2} \right) = \\ &= -\frac{3\eta ql}{2(h_2 - h_1)} \cdot \frac{h_1^2 - h_2^2}{h_1^2 h_2^2} = \frac{3\eta ql(h_1 + h_2)}{2h_1^2 h_2^2} \end{aligned}$$

Dacă fluidul ar fi ideal, creșterea secțiunii ar duce la micșorarea vitezei, deci la creșterea presiunii. Scriind relația lui Bernoulli pentru acest caz și înlocuind vitezele, din relația de continuitate cu $v_1 = q/h_1$ și $v_2 = q/h_2$, obținem:

$$p_{1,ideal} + \frac{\rho q^2}{2 h_1^2} = p_{2,ideal} + \frac{\rho q^2}{2 h_2^2}$$

De aici:

$$(p_2 - p_1)_{ideal} = \frac{\rho q^2}{2} \left(\frac{1}{h_1^2} - \frac{1}{h_2^2} \right) = \frac{\rho q^2 (h_2^2 - h_1^2)}{2h_1^2 h_2^2}$$

Se observă astfel, comportarea diferită a fluidului ideal de cel real. Scăderea presiunii la mișcarea laminară a fluidului vâscos, obținută cu prima formulă este corectă dacă aceasta este cu mult mai mare decât creșterea presiunii obținută cu a doua formulă, ca urmare a creșterii secțiunii. Pentru a verifica acest lucru, facem raportul membrilor din dreapta ai celor două relații:

$$\frac{3\eta ql(h_1 + h_2)}{2h_1^2 h_2^2} = \frac{3\eta l}{\rho q (h_2 - h_1)} = \frac{3\nu}{q} \frac{l}{h_2 - h_1}$$

Dar $\frac{\beta}{2} \cong \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \frac{h_2 - h_1}{2l}$

Prin urmare, $\beta \cong 2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{h_2 - h_1}{l} \ll \frac{3\nu}{q}$

Așadar, relația găsită este corectă.

5.4. Care este puterea disipată pentru învingerea forțelor de vâscozitate în filmul de ulei al lagărului axial din figura 5.4? Cu cât crește puterea disipată, în cazul în care deschiderea este uniformă? Se admite un regim laminar de curgere.

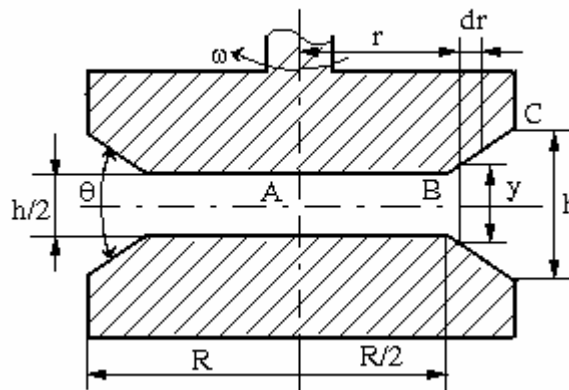


Figura 5.4.

Soluție

Pentru o fâșie elementară circulară, de rază r și lățime dr, variația de viteză între placa inferioară fixă ($v_0=0$) și cea superioară mobilă (v) este:

$$\Delta v = v - v_0 = \omega r$$

Conform legii lui Newton, între plăci se dezvoltă tensiunea de frecare

$$\tau = \eta \frac{\Delta v}{\frac{h}{2}} = \frac{2\eta\omega r}{h}$$

Prin urmare, cuplul elementar de frecare este:

$$dM = F_{fr} \cdot r = \tau dA r = \frac{2\eta\omega r}{h} 2\pi r^2 dr = \frac{4\pi\eta\omega}{h} r^3 dr$$

Puterea elementară disipată este:

$$dP = F dv = F \frac{dr}{dt} = Fr \frac{d\theta}{dt} = Fr\omega = \omega dM$$

Prin integrare, rezultă:

$$P_{AB} = \omega \int_0^{R/2} \frac{4\pi\eta\omega}{h} r^3 dr = \frac{4\pi\eta\omega^2}{h} \left. \frac{r^4}{4} \right|_0^{R/2} = \frac{\pi\eta\omega^2}{h} \frac{R^4}{16}$$

Pe porțiunea divergentă BC a lagărului, tensiunea de frecare este $\tau = \eta \Delta v / y$, unde y este de forma $y = \alpha r + \beta$. Constantele α și β rezultă din condițiile la limită, adică pentru $r = R/2$, $y = h/2 = \alpha R/2 + \beta$ și pentru $r = R$, $y = h = \alpha R + \beta$. Rezolvând sistemul dat de cele două relații pentru y se obțin: $\alpha = h/R$ și $\beta = 0$.

Prin urmare, $y = hr/R$ și $\tau = \eta \omega R / h$.

Rezultă cuplul elementar:

$$dM_{BC} = \tau dA r = \frac{\eta \omega R}{h} \cdot 2\pi r^2 dr$$

Considerând, ca și anterior, puterea elementară $dP_{BC} = \omega dM_{BC}$ și integrând, obținem:

$$P_{BC} = \omega \int_{\frac{R}{2}}^R \frac{\eta \omega R}{h} 2\pi r^2 dr = \frac{\eta \omega^2 R}{h} \cdot 2\pi \frac{r^3}{3} \Big|_{\frac{R}{2}}^R = \frac{2\pi \omega^2 R}{h} \left(\frac{R^3}{3} - \frac{R^3}{24} \right) =$$

$$= \frac{14\pi \eta \omega^2 R^4}{24h} = \frac{7\pi \eta \omega^2 R^4}{12h}$$

Puterea disipată totală este:

$$P = P_{AB} + P_{BC} = \frac{\pi \eta \omega^2 R^4}{16h} + \frac{7\pi \eta \omega^2 R^4}{12h} = \frac{31\pi \eta \omega^2 R^4}{48h}$$

Pentru fanta uniformă, puterea disipată este:

$$P' = \frac{\pi \eta \omega^2}{h} r \Big|_0^R = \frac{\pi \eta \omega^2 R^4}{h}$$

Deci:

$$\frac{P'}{P} = \frac{48}{31} = 1,55$$

Prin urmare, construcția unui lagăr uniform conduce la o sporire cu 55% a puterii disipate, ceea ce justifică geometria inițială a lagărului.

Probleme propuse

- 5.5. În circuitul de răcire din figura 5.5 se introduce uleiul de lucru în motor la temperatura $t_1=55^\circ\text{C}$, printr-o conductă de diametru $d_1=45\text{ mm}$, evacuându-se după aceea, către radiator, la temperatura $t_2=100^\circ\text{C}$, printr-o conductă de diametru $d_2=25\text{ mm}$. Dacă debitul de circulație este $Q=1,3\text{ l/s}$, să se determine regimul hidraulic de curgere la intrarea și ieșirea din motor. Pentru determinarea vâscozității cinematice a uleiului, funcție de temperatură, se utilizează diagrama din figura 5.6.

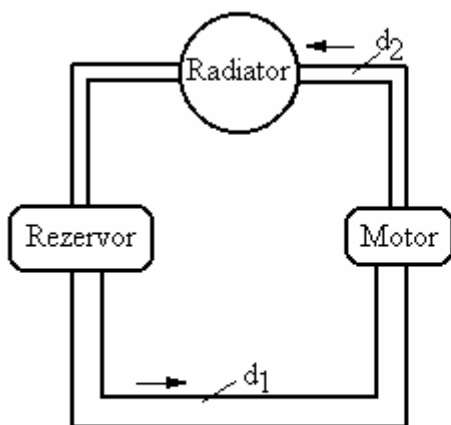


Fig. 5.5

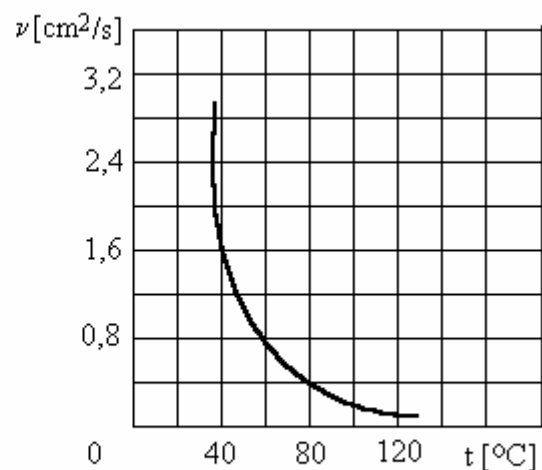


Fig. 5.6

- 5.6. După ieșirea din conducta de rază r_1 a unui schimbător de căldură, debitul Q de lichid de densitate ρ ajunge într-un colector de secțiune A_2 , în care repartiția vitezelor se uniformizează.

Să se determine creșterea de presiuni $p_2 - p_1$ și puterea disipată între secțiunile 1 și 2 (figura 5.7) în ipoteza că mișcarea lichidului în conductă este laminară.

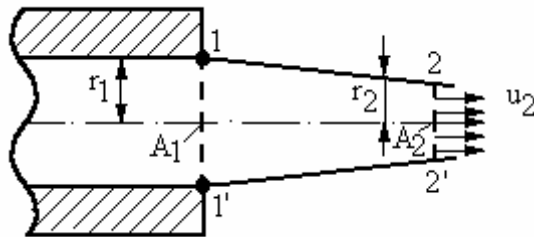


Figura 5.7.

CAPITOLUL 6

DINAMICA FLUIDELOR REALE ÎN MIȘCARE TURBULENTĂ

Noțiuni teoretice

În cazul mișcării turbulente, între straturile de fluid adiacente există un puternic schimb de substanță, adică, pe lângă mișcarea principală există și componente transversale ale vitezei. Prin urmare, viteza se calculează cu relația: $\vec{v} = \bar{\vec{v}}' + \bar{\vec{v}}$, unde $\bar{\vec{v}}$ este viteza instantanee, $\bar{\vec{v}}'$ este viteza medie iar \vec{v}' este pulsația (fluctuația) vitezei. Această relația arată că mișcarea turbulentă este o mișcare medie în timp, peste care se suprapune o mișcare fluctuantă. Analog vitezei, pentru orice mărime care caracterizează mișcarea turbulentă se pot defini o valoare instantanee și o valoare medie într-un interval de timp. Ca urmare ecuațiile mișcării turbulente folosesc mărimi mediate în timp și sunt, în forma vectorială, date de ecuația lui Reynolds:

$$\frac{\partial \bar{\vec{v}}}{\partial t} + (\bar{\vec{v}} \nabla) \bar{\vec{v}} = \bar{f} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \bar{\vec{v}} - \nabla \bar{\vec{v}}'^2 \quad (6.1)$$

La mișcarea turbulentă într-o conductă cilindrică circulară, distribuția de viteze este diferită de cea parabolică, găsită la mișcarea laminară, în acest caz existând, față de axa conductei, două zone diferite și anume un substrat vâscos și un nucleu turbulent, caracterizate prin profiluri de viteze diferite. La curgerea în conducte pot apare două tipuri de pierderi hidraulice și anume pierderi liniare și pierderi locale.

Pierderile hidraulice liniare sunt cele care se produc în orice conductă de secțiune constantă și sunt date de relația:

$$h_{in} = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g} \quad (6.2)$$

unde λ este coeficientul de pierderi liniare (**coeficientul lui Darcy**), l și d reprezintă lungimea și respectiv diametrul conductei, v este viteza medie de curgere în conductă iar g este accelerația gravitațională.

Pierderile hidraulice locale sunt cele datorate existenței rezistențelor hidraulice locale, pe care au loc disipări bruște ale energiei hidraulice a curentului de fluid, reprezentate prin coturi, reduții, confuzoare, difuzoare, robineti, ventile, vane, teuri, etc.

În cazul rezistențelor locale, pierderea hidraulică se scrie sub forma propusă de Weisbach:

$$h_{loc} = \zeta_1 \frac{v_1^2}{2g} = \zeta_2 \frac{v_2^2}{2g} \quad (6.3)$$

unde ζ_1 , ζ_2 sunt coeficienți de pierderi locale (**coeficienți Weisbach**) iar v_1 , v_2 sunt vitezele medii în secțiunile respective.

Problema fundamentală a calculului conductelor este determinarea coeficientului lui Darcy, λ . Din experiențele efectuate de Nikuradse, acesta a demonstrat că λ depinde de numărul lui Reynolds și de rugozitatea relativă a peretelui conductei, k/d , adică $\lambda = \lambda(Re, k/d)$. De asemenea, în urma acestor experiențe, Nikuradse a introdus noțiunile de **conductă hidraulic netedă**, pentru care indiferent de rugozitatea conductei, λ depinde numai de numărul lui Reynolds, $\lambda = \lambda(Re)$ și **conductă hidraulic rugoasă**, pentru care de la o anumită valoare a numărului Reynolds, λ rămâne constant și depinde numai de rugozitatea relativă a conductei, $\lambda = \lambda(k/d)$.

Dacă se presupun cunoscute: diametrul interior al conductei, d ; rugozitatea echivalentă a peretelui conductei, k ; viteza medie de curgere în secțiunea conductei, v și vâscozitatea cinematică a fluidului, ν , metodologia de calcul a lui λ este următoarea:

a) Se calculează numărul lui Reynolds cu relația (5.1).

b) Se compară valoarea obținută cu valoarea critică.

Dacă $Re < 2300$, mișcarea este laminară și λ se calculează cu relația:

$$\lambda = \frac{64}{Re} \quad (6.4)$$

Dacă $Re > 2300$, mișcarea este turbulentă.

c) Se calculează criteriul $Re\sqrt{\lambda}k/d$, alegând pentru λ o valoare inițială cuprinsă în intervalul (0,02 ... 0,04).

Dacă $Re\sqrt{\lambda}k/d < 9,4$ conducta este hidraulic rugoasă și λ se calculează cu **formula lui Karman**:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \lg(Re\sqrt{\lambda}) - 0,8 \quad (6.5)$$

Dacă $9,4 < Re\sqrt{\lambda}k/d < 200$, conducta este semirugoasă și λ se calculează cu **formula Colebrook și White**:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \lg\left(\frac{2,51}{Re\sqrt{\lambda}} + \frac{k}{3,71d}\right) \quad (6.6)$$

Dacă $Re\sqrt{\lambda}k/d > 200$, conducta este hidraulic rugoasă și λ se calculează cu **formula Karman și Nikuradse**:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \lg \frac{d}{k} + 1,14 \quad (6.7)$$

d) Cu valoarea obținută pentru λ se recalculează criteriul $Re\sqrt{\lambda}k/d$ și, dacă este cazul, se recalculează λ .

Aplicații

Probleme rezolvate

6.1 Să se determine pierderea de sarcină pe un tronson de conductă cu diametrul $d=200$ mm și lungimea $l=2500$ m, dacă aceasta transportă debitul de apă $Q=25$ l/s, la temperatura de 10°C , la care vâscozitatea cinematică a apei este $\nu=1,31 \cdot 10^{-6}$ m²/s. Rugozitatea echivalentă a conductei este $k=0,5$ mm.

Soluție

Pierderea de sarcină pe tronsonul de conductă considerat este o pierdere liniară (nu există rezistențe locale), care se calculează cu relația (6.2), unde viteza se determină din relația de definiție a debitului

$$v = \frac{Q}{A} = \frac{4Q}{\pi d^2} = \frac{4 \cdot 25 \cdot 10^{-3}}{\pi \cdot 0,2^2} = 0,796 \text{ m/s,}$$

iar λ se calculează după metodologia prezentată anterior.

a) Se calculează numărul lui Reynolds: $Re = \frac{vd}{\nu} = \frac{0,796 \cdot 0,2}{1,31 \cdot 10^{-6}} = 121527$

b) Rezultă $Re > 2300$, prin urmare mișcarea este turbulentă;

c) Se calculează criteriul $Re\sqrt{\lambda}k/d$, adoptând valoarea inițială $\lambda=0,03$. Rezultă:

$$Re\sqrt{\lambda}k/d = 121527\sqrt{0,03} \cdot \frac{0,5}{200} = 52,62$$

Deci $9,4 < Re\sqrt{\lambda}k/d < 200$, adică conducta este semirugoză și λ se calculează cu relația (6.6), folosind un procedeu iterativ, în care se ia ca valoare inițială pentru λ , valoarea calculată cu relația (6.7), adică:

$$\lambda_0 = \left(\frac{1}{2 \lg \frac{d}{k} + 1,14} \right)^2 = \left(\frac{1}{2 \lg \frac{200}{0,5} + 1,14} \right)^2 = 0,024846$$

Introducând această valoare în relația (6.4), obținem:

$$\lambda_1 = \left(\frac{1}{-2 \lg \left(\frac{2,51}{Re\sqrt{\lambda_0}} + \frac{k}{3,71d} \right)} \right)^2 = \left(\frac{1}{-2 \lg \left(\frac{2,51}{121527\sqrt{0,024846}} + \frac{0,5}{3,71 \cdot 200} \right)} \right)^2 = 0,02611$$

Rezultatul fiind mult diferit de valoarea inițială, $\lambda_1 \neq \lambda_0$, se aplică din nou formula (6.4), λ_0 devenind λ_1 , adică:

$$\lambda_2 = \left(\frac{1}{-2 \lg \left(\frac{2,51}{Re\sqrt{\lambda_1}} + \frac{k}{3,71d} \right)} \right)^2 = \left(\frac{1}{-2 \lg \left(\frac{2,51}{121527\sqrt{0,026111}} + \frac{0,5}{3,71 \cdot 200} \right)} \right)^2 = 0,026082$$

După încă un ciclu de aproximație, se obține:

$$\lambda_3 = \left(\frac{1}{-2 \lg \left(\frac{2,51}{Re\sqrt{\lambda_2}} + \frac{k}{3,71d} \right)} \right)^2 = \left(\frac{1}{-2 \lg \left(\frac{2,51}{121527\sqrt{0,026082}} + \frac{0,5}{3,71 \cdot 200} \right)} \right)^2 = 0,026082$$

Deoarece $\lambda_3 = \lambda_2$, se oprește calculul la acest pas și se consideră $\lambda=0,026082$.

d) Se recalculează criteriul $Re\sqrt{\lambda}k/d$ cu valoarea obținută:

$$Re\sqrt{\lambda}k/d = 121527\sqrt{0,026082} \cdot 0,5/200 = 49$$

Deoarece $9,4 < 49 < 200$, rezultă că domeniul admis inițial, adică cel al utilizării relației (6.6) este corect.

Rezultă pierderea de sarcină:

$$h_{in} = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g} = 0,026082 \frac{2500}{0,2} \frac{0,796^2}{2 \cdot 9,81} = 10,533 \text{ m}$$

6.2. Printr-o conductă cu lungimea $l=200$ m și diametrul $d=150$ mm, curge un debit de petrol $Q=5,3$ l/s, având densitatea $\rho=0,9 \cdot 10^{-3}$ kg/m³ și vâscozitatea cinematică $\nu=0,28 \cdot 10^{-4}$ m²/s. Să se calculeze pierderea de sarcină în conductă.

Soluție

Calculul pierderilor de sarcină se face cu relația (6.2) unde viteza se determină din relația debitului

$$v = \frac{4Q}{\pi d^2} = \frac{4 \cdot 5,3 \cdot 10^{-3}}{\pi \cdot 0,15^2} = 0,3 \text{ m/s}$$

iar λ , după metodologia deja cunoscută.

a) Se calculează numărul lui Reynolds:

$$Re = \frac{vd}{\nu} = \frac{0,3 \cdot 0,15}{0,28 \cdot 10^{-4}} = 1608$$

b) Se compară valoarea obținută cu valoarea critică $Re=1608 < 2300$, prin urmare curgerea este laminară și λ se calculează cu relația (6.4)

$$\lambda = \frac{64}{Re} = \frac{64}{1608} = 0,0398$$

Pierderea de sarcină este, prin urmare:

$$h_{lin} = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g} = 0,0398 \frac{200}{0,15} \frac{0,3^2}{2} = 2,388 \text{ m}$$

Căderea de presiune corespunzătoare este:

$$\Delta p = \gamma h_{lin} = 900 \cdot 2,388 = 2149,2 \text{ N/m}^2$$

unde:

$$\gamma = \rho g = \frac{0,9 \cdot 10^{-3}}{10^{-6}} 10 = 900 \text{ N/m}^3$$

6.3. Printr-o conductă cu variație bruscă de secțiune, de la diametrul $d_1=80$ mm la diametrul $d_2=250$ mm, ca în figura 6.1, curge debitul de apă $Q=250$ m³/h. Cunoscând coeficientul lui Weisbach $\zeta=0,45$, să se determine denivelările manometrului diferențial cu mercur, pentru cele două sensuri de curgere. Greutățile specifice pentru cele două fluide sunt: $\gamma_{H_2O}=9810$ N/m³ și $\gamma_{Hg}=13600$ N/m³.

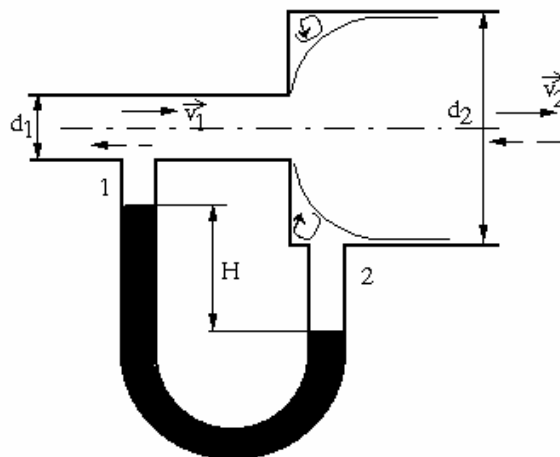


Figura 6.1.

Soluție

a) Când sensul de curgere este de la stânga la dreapta, pierderea locală de sarcină la lărgirea bruscă a conductei se calculează cu relația (6.3), particularizată în forma denumită formula Borda și Carnot:

$$h_{1-2} = \frac{(v_1 - v_2)^2}{2g} = \frac{v_1^2}{2g} \left(1 - \frac{v_2}{v_1}\right)^2$$

Vitezele v_1 și v_2 se calculează din ecuația de continuitate:

$$Q = v_1 \frac{\pi d_1^2}{4} = v_2 \frac{\pi d_2^2}{4}$$

de unde:

$$v_1 = \frac{4Q}{\pi d_1^2} = \frac{4}{\pi \cdot 0,08^2} \cdot \frac{70}{3600} = 3,86 \text{ m/s}$$

$$v_2 = v_1 \left(\frac{d_1}{d_2} \right)^2 = 3,86 \left(\frac{8}{25} \right)^2 = 0,395 \text{ m/s}$$

Rezultă:

$$h_{1-2} = \frac{3,86^2}{2 \cdot 9,81} \left(1 - \frac{0,395}{3,86} \right)^2 = 0,611 \text{ m}$$

Din ecuația lui Bernoulli între secțiunile 1 și 2:

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + h_{1-2}$$

cu $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, în cazul curgerii turbulente, rezultă:

$$\frac{p_2 - p_1}{\gamma_{H_2O}} = \frac{v_1^2 - v_2^2}{2g} - h_{1-2} = \frac{3,86^2 - 0,395^2}{2 \cdot 9,81} - 0,611 = 0,141 \text{ m}$$

denivelarea manometrului, în acest caz, este:

$$H = \frac{p_2 - p_1}{\gamma_{Hg} - \gamma_{H_2O}} = \frac{p_2 - p_1}{\gamma_{H_2O} \frac{\gamma_{Hg} - \gamma_{H_2O}}{\gamma_{H_2O}}} = \frac{0,141 \cdot 10^4}{10^4 (13,6 - 1)} = 0,01119 \text{ m} \approx 11,2 \text{ mm}$$

b) Când curgerea este de la dreapta la stânga, pierderile locale se calculează cu relația (6.3):

$$h_{2-1} = \zeta_1 \frac{v_1^2}{2g} = 0,45 \frac{3,86^2}{2 \cdot 9,81} = 0,342 \text{ m}$$

Rezultă:

$$\frac{p_2 - p_1}{\gamma} = \frac{v_1^2 - v_2^2}{2g} + h_{2-1} = \frac{3,86^2 - 0,395^2}{2 \cdot 9,81} + 0,342 = 1,094 \text{ m}$$

Denivelarea manometrului este, în acest caz:

$$H = \frac{1,094 \cdot 10^4}{10^4 (13,6 - 1)} = 0,0868 \text{ m} \approx 87 \text{ mm}$$

Probleme propuse

6.4. Gazele arse într-un cazan ies prin coșul de fum cu diametrul $D=2$ m și înălțimea $H=60$ m la temperatura de 450 °C. Debitul de gaz este $Q=81000$ m³/h, iar căderea de presiune datorită frecării este $\Delta p=9,81$ N/m². Cunoscând densitatea $\rho=0,5$ kg/m³ și vâscozitatea $\nu=0,6 \cdot 10^{-4}$ m²/s, corespunzătoare temperaturii date, să se determine viteza gazelor la distanța $y=300$ mm de perete și viteza gazelor în axa coșului (viteza maximă).

Să se rezolve problema 5.6 în ipoteza că mișcarea lichidului în conductă este turbulentă, repartiția

vitezei în raport cu raza fiind $u_1(r) = U_1 \left(1 - \frac{r}{r_1} \right)^{1/7}$ cu valoarea maximă U_1 în axă.

CAPITOLUL 7

MIȘCAREA PERMANENTĂ ÎN CONDUCTE SUB PRESIUNE

Noțiuni teoretice

Conductele sub presiune sunt elemente cu pondere importantă în instalațiile de transport și distribuție a fluidelor către consumator.

După configurație, rețelele de conducte pot fi monofilare, ramificate sau buclate și compuse din conducte scurte (cu numeroase rezistențe locale) și din conducte lungi ($l/d > 200$), la care pierderile locale sunt neglijabile.

La calculul conductelor sub presiune, destinate transportului lichidelor se aplică următoarele ipoteze de calcul: mișcarea se consideră permanentă, iar temperatura, densitatea, vâscozitatea și procentul de gaz dizolvat în lichid se consideră constante.

Există două probleme tipice de calcul al conductelor și anume:

- a) probleme de proiectare, în care se cere diametrul conductei;
- b) probleme de exploatare, în care diametrul conductei este cunoscut.

Bilanțul energetic al unei conducte sub presiune se obține aplicând relația generalizată a lui Bernoulli, între secțiunile inițială 1 și finală 2 ale conductei studiate, adică:

$$\frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 = \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + \sum h_{1-2} \quad (7.1)$$

unde:

α_1, α_2 reprezintă coeficienții Coriolis, având valoarea 1 pentru mișcarea turbulentă și 2 pentru mișcarea laminară;

$\sum h_{1-2}$ - suma pierderilor liniare și locale între cele două secțiuni.

Sarcina H a sistemului sub presiune se calculează ca diferența înălțimilor piezometrice dintre intrare și ieșire:

$$H = \left(z_1 + \frac{p_1}{\gamma} \right) - \left(z_2 + \frac{p_2}{\gamma} \right) = \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} - \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} + \sum h_{1-2} \quad (7.2)$$

În calculul sarcinii H , una dintre viteze se substituie prin cealaltă, din ecuația de continuitate. De obicei, ca viteză de referință se consideră viteza v_2 . Pentru o conductă scurtă, cuprinzând n tronsoane înseriate, de lungime l_i și diametru d_i și m rezistențe locale, pierderile totale de sarcină, $\sum h_{1-2}$ se calculează cu relația:

$$\sum h_{1-2} = \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{l_i}{d_i} + \sum_{j=1}^m \zeta_{ij} \right) \frac{v^2}{2g} = \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{l_i}{d_i} + \sum_{j=1}^m \zeta_{ij} \right) \frac{Q^2}{2gA_i^2} = \sum_{i=1}^n M_i Q^2 \quad (7.3)$$

unde:

$$M_i = \frac{1}{2gA_i^2} \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{l_i}{d_i} + \sum_{j=1}^m \zeta_{ij} \right) \text{ poartă numele de } \mathbf{modul\ de\ rezistență\ al\ tronsonului\ i.}$$

La conductele lungi simple se neglijează atât termenii cinetici cât și pierderile locale de sarcină. În acest caz, sarcina sistemului este:

$$H = \left(z_1 + \frac{p_1}{\gamma} \right) - \left(z_2 + \frac{p_2}{\gamma} \right) = h_{1-2} = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g} = \lambda \frac{l}{d} \frac{Q^2}{2gA^2} = M_l Q^2 \quad (7.4)$$

unde M_l reprezintă **modulul de rezistență liniar**.

Rețelele de conducte ramificate se caracterizează prin faptul că fiecare consumator este alimentat dintr-o singură direcție și oferă avantajul unui consum redus de material, dezavantajul principal fiind acela al unei fiabilități mici. Calculul acestui tip de rețea se face alegând un **traseu principal** al rețelei, între punctul de alimentare și consumatorul cel mai îndepărtat și dimensionând acest traseu, tronson cu tronson, începând de la consumator, cu relația (7.2), apoi calculând ramificațiile, cu înălțimile piezometrice la capete impuse atât de consumator, cât și de traseul principal.

Rețelele de conducte inelare (buclate) asigură fiecărui consumator o alimentare din cel puțin două direcții, oferind astfel o fiabilitate și o stabilitate hidraulică mai mare.

Calculul acestui tip de rețea se face admițând inițial o distribuție de debite (ca mărime și sens) pe fiecare inel și calculând apoi eroarea de închidere a pierderilor de sarcină Δh_r , pe fiecare inel, care trebuie să fie cuprinsă în intervalul 0,3 ... 0,5 m H₂O. În caz contrar, se reiau calculele pentru o nouă distribuție a debitelor, operație care poartă numele de compensarea rețelei.

Aplicații

Probleme rezolvate

- 7.1. În rețeaua de conducte din figura 7.1, curgerea apei are loc de la rezervorul de presiune A, prin magistrala ABCDE și ramurile BF, CM și CN. Să se aleagă diametrele (standardizate), pentru tronsoanele de conducte și să se reprezinte linia piezometrică, admițând debitele la consumatori și lungimile tronsoanelor conform figurii. În punctele terminale, presiunea nu trebuie să scadă sub 8 mH₂O. Cotele z_i ale nodurilor sunt încadrate în chenare.

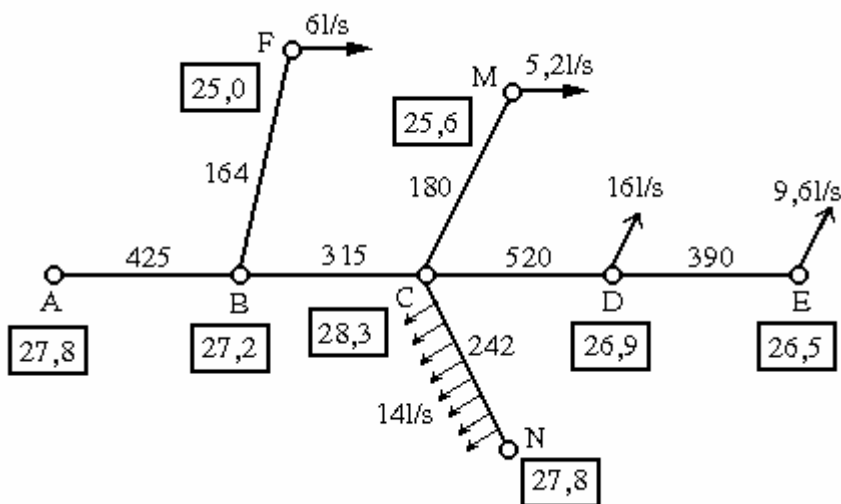


Figura 7.1.

Soluție

Se alege ca traseu principal (magistrală), traseul ABCDE. Debitelor pe tronsoanele acestui traseu se calculează pornind de la nodul terminal E, spre nodul de alimentare, A.

$$Q_{ED} = Q_E = 9,6 \text{ l/s}; \quad Q_{DC} = Q_E + Q_D = 16 + 9,6 = 25,6 \text{ l/s}; \quad Q_{CB} = Q_{DC} + Q_{CN} + Q_{CM} = 25,6 + 14 + 5,2 = 44,8 \text{ l/s};$$

$$Q_{BA} = Q_{CB} + Q_{BF} = 50,8 \text{ l/s}.$$

Diametrele standard ale tronsoanelor se aleg din tabelul 7.1, în funcție de debitul calculat anterior. Între două valori standardizate se alege, de regulă, diametrul cel mai mare.

Tabelul 7.1. Valorile standardizate ale diametrului, funcție de viteza limită sau debitul recomandat

diametrele standard [mm]	50	75	100	125	150	200	250	300	350	400
viteza limită recomandată [m/s]	0,75	0,75	0,76	0,82	0,85	0,95	1,02	1,05	1,1	1,15
debitul limită recomandat [l/s]	1,5	3,3	6	10	15	30	50	74	106	146

Din tabel, rezultă:

$d_{ED}=125$ mm; $d_{DC}=200$ mm; $d_{CB}=250$ mm; $d_{BA}=250$ mm.

Cu aceste diametre se determină vitezele reale de curgere pe tronsoane, folosind relația de definiție a debitului, adică $v=4Q/\pi d^2$.

Se obține

$$v_{ED} = \frac{4 \cdot 9,6 \cdot 10^{-3}}{\pi \cdot 0,125^2} = 0,78 \text{ m/s}; v_{DC} = \frac{4 \cdot 25,6 \cdot 10^{-3}}{\pi \cdot 0,2^2} = 0,82 \text{ m/s};$$

$$v_{CB} = \frac{4 \cdot 44,8 \cdot 10^{-3}}{\pi \cdot 0,25^2} = 0,91 \text{ m/s}; v_{BA} = \frac{4 \cdot 50,8 \cdot 10^{-3}}{\pi \cdot 0,25^2} = 1,03 \text{ m/s}.$$

Cu aceste viteze se calculează pierderile de sarcină pe tronsoane, utilizând relația $h=Q^2l/m^2$, unde m este modulul de debit care se alege din tabelul 7.2.

Tabelul 7.2 Modulul de debit și viteza minimă pătratică, funcție de diametrul conductei

d [mm]	m [l/s]		Viteza minimă pătratică	
	conducte normale	conducte noi	conducte normale	conducte noi
50	8,313	10,10	0,8	2,8
100	53,61	63,73	0,9	3,2
200	340,8	398	1,0	3,5
300	999,3	1157	1,1	3,7
400	2140	2463	1,1	3,8

Considerând conductele normale (vechi), prin interpolare, rezultă: $m_{ED}=97,39$ l/s; $m_{DC}=340,8$ l/s; $m_{cb}=616,4$ l/s; $m_{ba}=616,4$ l/s.

Deoarece, pe tronsoanele ED, DC și CB, viteza reală de curgere, calculată anterior, este mai mică decât viteza minimă pătratică specificată în tabelul 7.2, pe aceste tronsoane modulul de debit se corectează cu relația $m_p=\theta_1 m$, unde factorul de corecție θ_1 se alege din tabelul 7.3.

Tabelul 7.3. Factorul de corecție θ_1 , funcție de viteza reală de curgere

viteza [m/s]	θ_1	
	conducte normale	conducte noi
0,2	0,84	0,86
0,4	0,92	0,91
0,6	0,95	0,93
0,8	0,97	0,95
1,2	0,99	0,96

Rezultă:

$\theta_{1ED}=0,97$; $\theta_{1DC}=0,97$; $\theta_{1CB}=0,97$ și

$m_{pED}=0,97 \times 97,39=94,46$ l/s; $m_{pDC}=0,97 \times 340,8=330,51$ l/s; $m_{pCB}=0,97 \times 597,9$ l/s.

Prin urmare, pierderile de sarcină pe tronsoane sunt:

$$h_{ED} = \frac{9,6^2 \cdot 390}{94,46^2} = 4,02 \text{ m}; \quad h_{DC} = \frac{25,6^2 \cdot 520}{330,5^2} = 3,12 \text{ m};$$

$$h_{CB} = \frac{44,8^2 \cdot 315}{597,9^2} = 1,73 \text{ m}; \quad h_{BA} = \frac{50,8^2 \cdot 425}{616,4^2} = 2,88 \text{ m}.$$

Nodurile liniei piezometrice se obțin observând că în punctul E, cota piezometrică este $Z_E + p_E = 26,5 + 8 = 34,5$ m. Se observă că s-a luat $p_E = 8$ m, deoarece în enunțul problemei s-a impus că presiunea să nu scadă sub 8 m H₂O.

Se adaugă, în continuare, pierderile de sarcină pe tronsoane:

$$Z_D + p_D = Z_E + p_E + h_{DE} = 34,5 + 4,02 = 38,52 \text{ m}$$

$$Z_C + p_C = Z_D + p_D + h_{DC} = 38,52 + 3,12 = 41,64 \text{ m}$$

$$Z_B + p_B = Z_C + p_C + h_{CB} = 41,64 + 1,73 = 43,37 \text{ m}$$

$$Z_A + p_A = Z_B + p_B + h_{BA} = 43,37 + 2,88 = 46,25 \text{ m}$$

Rezultă, cota suprafeței libere, față de fundul rezervorului, în nodul A:

$$46,25 - 27,8 = 18,45 \text{ m}$$

În continuare, se efectuează calculul ramurilor BF, CM și CN. În nodurile B și C se cunoaște cota piezometrică, rezultând pierderile.

Din: $Z_F + p_F = Z_B + p_B - h_{BF}$, rezultă:

$$h_{BF} = Z_B - Z_F + p_B - p_F = 41,64 - 25 + 1,73 - 8 = 10,37 \text{ m}$$

Din: $Z_M + p_M = Z_C + p_C - h_{CM}$, rezultă:

$$h_{CM} = Z_C - Z_M + p_C - p_M = 38,52 - 25,6 + 3,12 - 8 = 8,04 \text{ m}$$

Prin urmare:

$$Z_F + p_F = 43,37 - 10,37 = 33 \text{ m}$$

$$Z_M + p_M = 41,6 - 8,04 = 33,6 \text{ m}$$

Modulul de debit, pentru tronsoanele BF și CM se calculează cu relația $m = Q/j^{1/2}$ unde j este panta hidraulică, calculată cu relația $j = h/l$. Rezultă:

$$j_{BF} = \frac{h_{BF}}{l_{BF}} = \frac{10,37}{164} = 0,063; \quad m_{BF} = \frac{Q_{BF}}{\sqrt{j_{BF}}} = \frac{6}{\sqrt{0,063}} = 23,9 \text{ l/s};$$

$$j_{CM} = \frac{h_{CM}}{l_{CM}} = \frac{8,04}{180} = 0,044; \quad m_{CM} = \frac{Q_{CM}}{\sqrt{j_{CM}}} = \frac{5,2}{\sqrt{0,044}} = 24,6 \text{ l/s}.$$

Din tabelul 7.2. pentru aceste valori ale modulelor se aleg diametrele $d_{BF} = 75$ mm și $d_{CM} = 75$ mm.

Vitezele reale de curgere sunt:

$$v_{BF} = \frac{4 \cdot 6 \cdot 10^{-3}}{\pi \cdot 0,075^2} = 1,36 \text{ m/s}; \quad v_{CM} = \frac{4 \cdot 5,2 \cdot 10^{-3}}{\pi \cdot 0,075^2} = 1,18 \text{ m/s}.$$

Se constată că ambele viteze sunt mai mari decât viteza minimă pătratică specificată în tabelul 7.2, deci nu mai este necesară aplicarea corecției θ_1 .

Pe tronsonul CN, cu debit uniform distribuit, pierderea de sarcină se calculează din relația:

$$Z_N + p_N = Z_C + p_C - h_{CN}, \text{ de unde:}$$

$$h_{CN} = Z_C - Z_N + p_C - p_N = 41,64 - (27,8 + 8) = 5,8 \text{ m}$$

Rezultă:

$$Z_N + p_N = 41,64 - 5,8 = 35,8 \text{ m}.$$

În cazul debitului distribuit, modulul de debit se calculează cu relația: $m = Q_T j^{1/2}$, unde Q_T este debitul de consum echivalent, determinat cu relația $Q_T = Q/3^{1/2}$, adică:

$$Q_T = Q_{CN}/3^{1/2} = 14/3^{1/2} = 8,1 \text{ l/s}.$$

Rezultă panta și modulul de debit:

$$j_{CN} = \frac{h_{CN}}{l_{CN}} = \frac{5,8}{242} = 0,024; \quad m_{CN} = \frac{Q_T}{\sqrt{j_{CN}}} = \frac{8,1}{\sqrt{0,024}} = 52,2 \text{ l/s}$$

Din tabelul 7.2, cu această valoare a modulului se alege diametrul standardizat $d_{CN}=100 \text{ mm}$. Viteza reală de curgere este:

$$v_{CN} = \frac{4 \cdot 8,1 \cdot 10^{-3}}{\pi \cdot 0,12} = 1,04 \text{ m/s,}$$

mai mare decât viteza minimă pătratică din tabel, deci nu mai este necesară corecția θ_1 . În figura 7.2. s-a reprezentat linia piezometrică obținută din calcul.

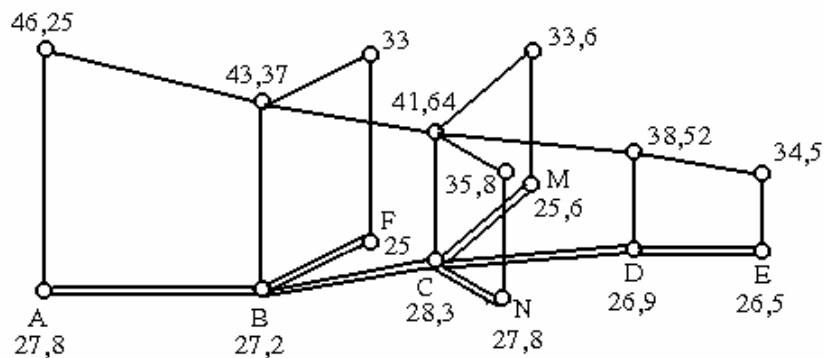


Figura 7.2.

7.2. Pentru rețeaua din figura 7.3. se cunosc următoarele date: diametrul $d=35 \text{ mm}$ și lungimea $L=14,4 \text{ m}$; suprapresiunea în rezervorul A, $p_1=32,3 \cdot 10^3 \text{ N/m}^2$; nivelele în rezervoare $H_A=2,3 \text{ m}$, $H_B=6,65 \text{ m}$, coeficienții pierderilor locale de sarcină $\xi_1=0,5$ (intrare), $\xi_2=8,3$ (robinet), $\xi_3=0,22$ (cot), $\xi_4=1$ (ieșire) și coeficientul de pierderi liniare de sarcină $\lambda=0,033$ (conductă). Se cere debitul transportat prin conductă.

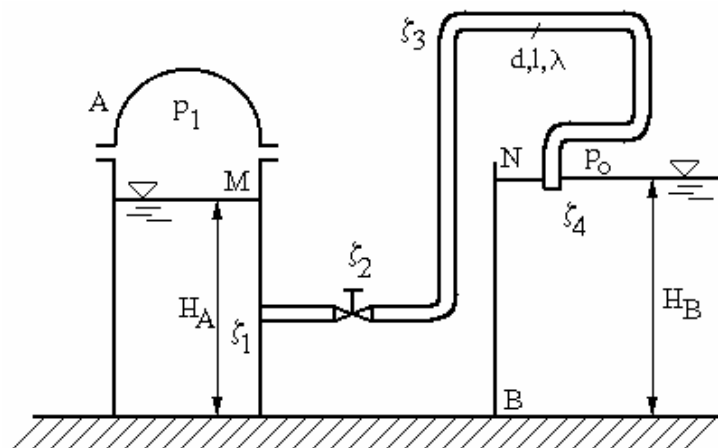


Figura 7.3.

Soluție

Debitul se determină din relația de definiție, adică

$$Q = v \cdot \frac{\pi d^2}{4} = 4,792 \cdot \frac{\pi \cdot 0,035^2}{4} = 4,611 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$$

unde viteza în conductă se obține scriind relația lui Bernoulli între punctele M și N, aflate pe suprafețele libere ale celor două rezervoare.

$$\frac{p_1 + p_0}{\gamma} + H_A = \frac{p_0}{\gamma} + H_B + \left(\lambda \frac{L}{d} + \zeta_1 + \zeta_2 + 5\zeta_3 + \zeta_4 \right) \frac{v^2}{2g}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{32,3 \cdot 10^4}{9810} + 2,3 = 6,65 + \left(0,033 \frac{14,4}{0,035} + 0,5 + 8,3 + 5 \cdot 0,22 + 1 \right) \frac{v^2}{2 \cdot 9,81} \Rightarrow v = 4,792 \text{ m/s}$$

Probleme propuse

- 7.3. Ce lungime L trebuie să aibă conducta din figura 7.4, pentru a se menține nivelul constant în rezervor. Se dau: $d=80 \text{ mm}$, rugozitatea $k_e=0,16 \text{ mm}$, $\xi_1=0,5$ (intrare), $\xi_2=0,2$ (cot), $v=0,110^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$.

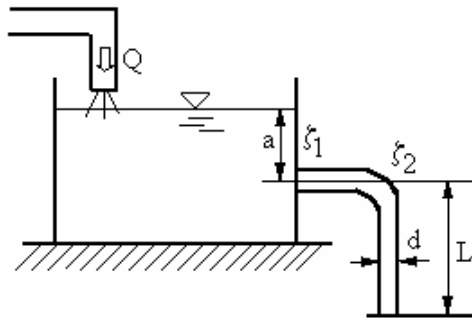


Figura 7.4.

- 7.4. Pe o conductă de diametru $d=65 \text{ mm}$ care transportă apă ($v=10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$) cu debitul $Q=410^{-2} \text{ m}^3/\text{s}$ este conectată o derivație de lungime $l_2=19 \text{ m}$ având același diametru (figura 7.5). Dacă $l_1=13,5 \text{ m}$ iar $\xi=12,3$, conductele având rugozitatea echivalentă $k_e=0,24 \text{ mm}$, să se determine debitele în cele două ramuri în paralel.

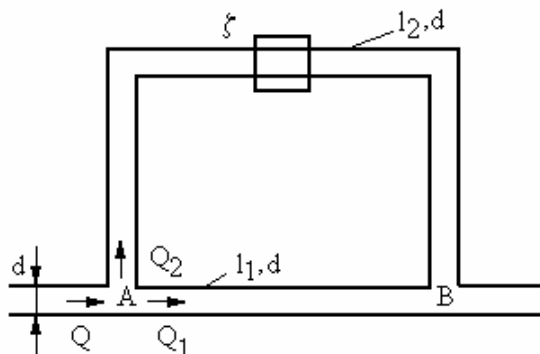


Figura 7.5.

CAPITOLUL 8

MIȘCĂRI EFLUENTE PERMENENTE

Noțiuni teoretice

Mișcările efluente permanente ale fluidelor sunt mișcările care se produc la trecerea unui fluid, dintr-un recipient, printr-o secțiune de curgere relativ mică, într-un spațiu ocupat, în general, de alt fluid.

Studiul acestui tip de mișcare se face într-o zonă restrânsă, în jurul secțiunii de trecere și neglijând în calculul parametrilor curgerii, pierderile de sarcină. Exemple ale mișcării efluente sunt curgerea lichidelor sau gazelor prin orificii, ajutaje sau peste deversoare.

Orificiul este o deschizătură în peretele unui rezervor care conține gaz sau lichid. Dacă se consideră curgerea unui lichid printr-un **orificiu mic**, practicat în peretele subțire al unui rezervor închis, viteza de curgere prin orificiul mic este dată de **formula lui Torricelli**:

$$v = \varphi \sqrt{2g \left(h + \frac{p_1}{\gamma} - \frac{p_0}{\gamma} \right)} \quad (8.1)$$

unde φ este coeficientul de viteză.

Dacă rezervorul este deschis, $p_0 = p_1 =$ presiunea atmosferică, rezultă:

$$v = \varphi \sqrt{2gh} \quad (8.2)$$

Debitul prin orificiu se calculează cu relația:

$$Q = \mu_0 A \sqrt{2gh} \quad (8.3)$$

unde $\mu_0 = \varepsilon \varphi$ este coeficientul de debit al orificiului ($\varepsilon = A_c/A$; A_c este aria secțiunii contractate a jetului, măsurată la distanța $l_0 = 0,5d$, de la orificiu, iar A este aria secțiunii orificiului)

Dacă se consideră curgerea unui lichid printr-un **orificiu mare**, de formă oarecare, practicat în peretele subțire al unui rezervor, debitul prin orificiul mare este:

$$Q = \mu_0 \sqrt{2gh} \int_{h_1}^{h_2} [b(z) \sqrt{z}] dz \quad (8.4)$$

unde $b(z)$ este o funcție care dă lățimea orificiului pentru fiecare adâncime z , variind între h_1 și h_2 .

Ajutajul este un tub relativ scurt, montat în dreptul unui orificiu, în scopul măririi debitului și obținerii unui jet dirijat. Calculul debitului printr-un ajutaj atașat unui orificiu se face cu relațiile (8.3) sau (8.4), înlocuind coeficientul de debit al orificiului, μ_0 cu coeficientul de debit al ajutajului, μ_a , care are, în general, valori mai mari ca μ_0 .

Deversorul este un orificiu de dimensiuni relativ mari, deschis la partea superioară, practicat în peretele vertical al unui rezervor, curgerea făcându-se cu suprafața liberă. Debitul prin deversor se calculează cu relația:

$$Q = \mu \sqrt{2g} \int_0^H b(z) \sqrt{z} dz \quad (8.5)$$

unde H este înălțimea lamei deversoare.

Aplicații

Probleme rezolvate

- 8.1. Neglijând pierderile de sarcină, să se determine debitul evacuat prin orificiul din figura 8.1. Se știe că $\gamma_{ulei}=0,8\gamma_{ap\grave{a}}$. Să se determine apoi debitul în cazul în care rezervorul ar fi plin cu apă.

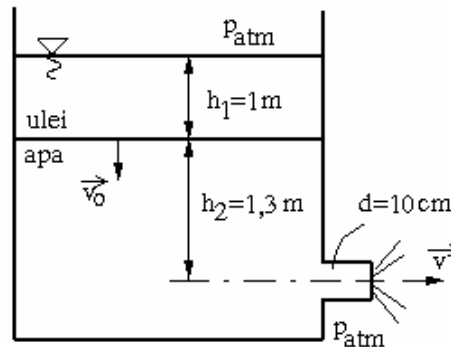


Figura 8.1.

Soluție

a) Pentru cazul în care, în rezervor se găsesc apă și ulei, se scrie ecuația lui Bernoulli între un punct situat pe suprafața de separație apă-ulei și altul de pe axa orificiului.

$$\frac{v_0^2}{2g} + \frac{p_{atm} + \gamma_{ulei}h_1}{\gamma_{apa}} + h_2 = \frac{v^2}{2g} + \frac{p_{atm}}{\gamma_{apa}}$$

Dacă se admite că secțiunea rezervorului este foarte mare, se poate neglija viteza v_0 , de coborâre a suprafeței de separație. Rezultă:

$$v^2 = 2g \left(h_2 + \frac{p_{atm} + \gamma_{ulei}h_1}{\gamma_{apa}} - \frac{p_{atm}}{\gamma_{apa}} \right) = 2g \left(\frac{\gamma_{ulei}h_1}{\gamma_{apa}} + h_2 \right)$$

de unde:

$$v = \sqrt{2g \left(h_2 + \frac{\gamma_{ulei}h_1}{\gamma_{apa}} \right)} = \sqrt{2 \cdot 9,81(1,3 + 0,8 \cdot 1)} = \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 2,1} \cong 6,42 \text{ m/s}$$

Debitul teoretic prin orificiu este:

$$Q = \frac{\pi \cdot d^2}{4} v = \frac{\pi \cdot 0,1^2}{4} \cdot 6,42 = 50,4 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s} = 50,414 \text{ l/s}$$

b) În cazul în care în rezervor se află numai apă, calculul se face în mod analog, înlocuind valoarea $\gamma_{ulei}/\gamma_{ap\grave{a}}=0,8$ cu $\gamma_{ap\grave{a}}/\gamma_{ap\grave{a}}=1$, adică:

$$v' = \sqrt{2g(h_2 + h_1)} = \sqrt{2 \cdot 9,81(1,3 + 1)} = \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 2,3} \cong 6,72 \text{ m/s}$$

$$Q' = \frac{\pi d^2}{4} v' = \frac{\pi \cdot 0,1^2}{4} \cdot 6,72 = 52,76 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s} = 52,76 \text{ l/s}$$

- 8.2. Printr-un ajutoraj cu diametrul $d_1=3$ cm, țâșnește vertical ascendent un jet circular, ca în figura 8.2. Admițând că pierderile de sarcină sunt neglijabile, să se determine diametrul d_2 al jetului, la 5 m deasupra ajutorajului, dacă viteza de ieșire este $v_1=15$ m/s.

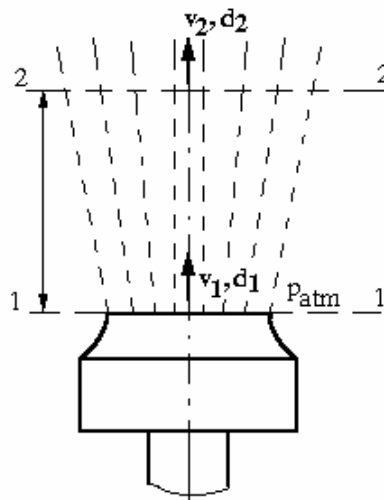


Figura 8.2.

Soluție

Se scrie relația lui Bernoulli, între punctele 1 și 2, în axa ajutorajului:

$$\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_{atm}}{\gamma} = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_{atm}}{\gamma} + z_2$$

Rezultă:

$$v_2 = \sqrt{v_1^2 - 2gz_2} = \sqrt{15^2 - 2 \cdot 9,81 \cdot 5} = 11,265 \text{ m/s}$$

Diametrul d_2 rezultă din ecuația de continuitate:

$$Q = v_1 \frac{\pi d_1^2}{4} = v_2 \frac{\pi d_2^2}{4}$$

de unde:

$$d_2 = \sqrt{\frac{v_1}{v_2}} d_1 = \sqrt{\frac{15}{11,265}} \cdot 3 = 3,462 \text{ cm}$$

- 8.3. Ce debit trece prin deversorul trapezoidal din figura 8.3 cu $\alpha=60^\circ$, $\mu=0,62$ și $b=2$ m, dacă lamela deversoare are înălțimea $H=1,5$ m?

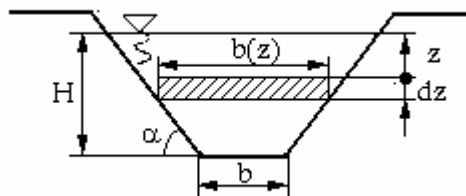


Figura 8.3.

Soluție

Calculul debitului se face cu relația 8.5, în care funcția $b(z)$ este dată de relația:

$$b(z) = b + 2(H-z)\text{ctg}\alpha$$

Rezultă:

$$\begin{aligned}
 Q &= \mu \sqrt{2g} \int_0^H [b + 2(H-z) \operatorname{ctg} \alpha] \sqrt{z} dz = \\
 &= \mu \sqrt{2g} \int_0^H [(b + 2H \operatorname{ctg} \alpha) z^{1/2} - 2z^{3/2} \operatorname{ctg} \alpha] dz = \\
 &= \mu \sqrt{2g} \left[\frac{2}{3} (b + 2H \operatorname{ctg} \alpha) z^{3/2} - \frac{2}{5} \cdot 2 \cdot z^{5/2} \operatorname{ctg} \alpha \right]_0^H = \\
 &= \mu \sqrt{2g} \left(\frac{2b}{3} H^{3/2} + \frac{4}{3} H^{5/2} \operatorname{ctg} \alpha - \frac{4}{5} H^{5/2} \operatorname{ctg} \alpha \right) = \\
 &= \mu \sqrt{2g} H^{3/2} \left(\frac{2b}{3} + \frac{8}{15} \cdot 1,5 \operatorname{ctg} 60^\circ \right) = \\
 &= 2,74 \cdot 1,83 (1,33 + 0,57) \cong 10 \text{ m}^3 / \text{s}
 \end{aligned}$$

Probleme propuse

- 8.4.** Printr-un orificiu circular cu muchie ascuțită, de diametru $d=5$ cm, curge un debit $Q=12 \cdot 10^{-3}$ m^3/s , sub sarcina $H=5$ m (figura 8.4). Să se determine coeficientul de debit. Dacă suprapresiunea medie în jet în planul orificiului este $\Delta p=p_1-p_2=2,9 \cdot 10^{-4}$ N/m^2 , să se determine coeficientul de contracție (aria jetului/aria orificiului).

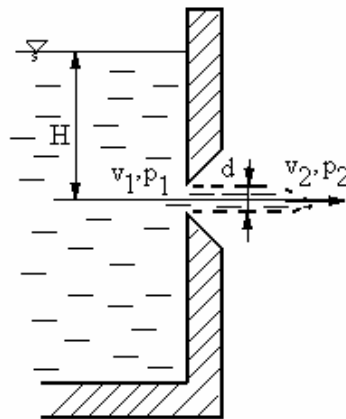


Figura 8.4.

- 8.5.** Dintr-un rezervor cu nivel constant, apa curge printr-un ajutoraj cu diametrul $d=4$ cm (figura 8.5). Pierderea de sarcină în ajutoraj este $h_v=1,5$ m. Să se determine înălțimea H a apei în rezervor și să se calculeze debitul Q , cunoscând coeficientul de debit $\mu_0=0,82$.

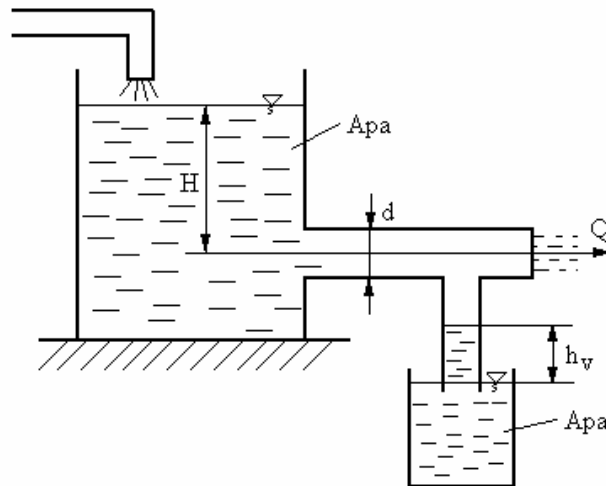


Figura 8.5.

8.6. Pentru un deversor dreptunghiular de lățime B, având pragul la cota P deasupra fundului și înălțimea lamei deversante H (figura 8.6), debitul deversat se poate calcula cu relația:

$$Q = \frac{2}{3} C_d B \sqrt{2g} H^{3/2}$$

unde C_d este coeficientul de debit, variabil cu sarcina H și care se poate determina fie cu formula lui Bazin:

$$C_d = \left(0,607 + \frac{0,0045}{H} \right) \left[1 + 0,55 \left(\frac{H}{P+H} \right)^2 \right],$$

fie cu formula lui Rehbock,

$$C_d = 0,605 + \frac{1}{1050H - 3} + \frac{0,08H}{P}$$

Dacă $B=12$ m, $H=40$ cm și $P=2$ m, să se determine debitul deversat, calculul făcându-se prin ambele metode.

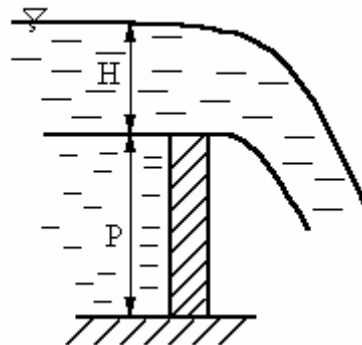


Figura 8.6.

CAPITOLUL 9

TEORIA TURBOMAȘINILOR

Noțiuni teoretice

Turbomașinile sunt mașini hidraulice de forță, la care există un curent continuu de fluid între secțiunea de intrare și ieșire, transferul energetic realizându-se prin interacțiunea hidrodinamică dintre curent și un rotor prevăzut cu palete profilate. În categoria turbomașinilor intră pompele și ventilatoarele centrifuge și axiale, turbinele hidraulice, etc.

Parametrii energetici ai turbomașinilor sunt debitul - Q , energia specifică totală primită (generatoare) sau cedată (motoare) de fluid la trecerea sa prin mașină, raportată la unitatea de greutate - H , sau raportată la unitatea de masă Y , puterea utilă - P_u , puterea absorbită - P și randamentul η .

Ecuatia fundamentală a turbomașinilor este, în cazul generatoarelor hidraulice:

$$gH_t = Y_t = (\overline{uV_u})_e - (\overline{uV_u})_i \quad (9.1)$$

sau, în cazul motoarelor hidraulice:

$$gH_t = Y_t = (\overline{uV_u})_i - (\overline{uV_u})_e \quad (9.2)$$

unde indicii „t” arată că valorile sunt teoretice, indicii „i” și „e” desemnează intrarea și respectiv ieșirea din mașină, iar mărimea $(\overline{uV_u})$ reprezintă valoarea medie a produsului dintre viteza de transport și componenta tangențială a vitezei absolute.

Dacă se consideră două turbomașini asemenea din punct de vedere geometric, care funcționează astfel încât mișcarea fluidului în interiorul lor generează un grup de similitudine, relațiile care leagă parametrii energetici ai celor două mașini sunt (în ipoteza randamentelor constante):

$$\frac{Q'}{Q} = \left(\frac{D'}{D}\right)^3 \frac{n'}{n} \quad (9.3)$$

$$\frac{gH'}{gH} = \frac{Y'}{Y} = \left(\frac{D'}{D}\right)^2 \left(\frac{n'}{n}\right)^2 \quad (9.4)$$

$$\frac{P'}{P} = \frac{\rho'}{\rho} \left(\frac{D'}{D}\right)^5 \left(\frac{n'}{n}\right)^3 \quad (9.5)$$

unde Q este debitul de fluid, ρ este densitatea fluidului și n este turația mașinii. Semnul prim (') afectează mărimile corespunzătoare mașinii model (ai cărei parametri sunt cunoscuți) iar fără acest semn sunt notate mărimile pentru mașina prototip (pentru care se dorește calcularea parametrilor).

Dacă se consideră cazul aceleiași mașini funcționând la două turații diferite, cu același fluid de lucru, relațiile (9.3), (9.4) și (9.5) devin:

$$\frac{Q'}{Q} = \frac{n'}{n}; \quad \frac{H'}{H} = \frac{Y'}{Y} = \left(\frac{n'}{n}\right)^2; \quad \frac{P'}{P} = \left(\frac{n'}{n}\right)^3 \quad (9.6)$$

Aplicații

Probleme rezolvate

- 9.1.** Fiind dată o pompă cu caracteristicile $Q'=50$ l/s și $H'=30$ m, la turația $n'=960$ rot/min, să se determine debitul și înălțimea de pompare la turația $n=1450$ rot/min. Admițând că randamentul este constant și egal cu 70%, să se determine puterea necesară pentru antrenare, în cele două cazuri.

Soluție

Pentru determinarea debitului și înălțimii de pompare la turația n se utilizează relațiile (9.6).

Rezultă:

$$Q = Q' \frac{n}{n'} = 50 \cdot \frac{1450}{960} = 72,5211 \text{ l/s}$$

$$H = H' \left(\frac{n'}{n} \right)^2 = 30 \left(\frac{1450}{960} \right)^2 = 68,441 \text{ m}$$

Pentru determinarea puterii absorbite în cele două cazuri, se utilizează relația:

$$P = \frac{\rho g Q H}{\eta}$$

Astfel, la turația n' , puterea absorbită este:

$$P' = \frac{1000 \cdot 9,81 \cdot 0,05 \cdot 30}{0,7} = 21014 \text{ W}$$

La turația n , puterea absorbită este:

$$P = \frac{1000 \cdot 9,81 \cdot 0,07521 \cdot 68,441}{0,7} = 72441 \text{ W}$$

- 9.2.** La încercarea modelului la scara 1/5 al unei pompe centrifuge, se măsoară parametrii: $Q_M=10$ l/s; $H_M=1,02$ m și $n_M=590$ rot/min. Să se determine parametrii pompei la regimul similar, cu turația $n=730$ rot/min, considerând că randamentele modelului și prototipului sunt egale.

Soluție

Debitul pompei, la turația n , se determină cu relația (9.3):

$$Q = Q_M \frac{n}{n_M} \left(\frac{D}{D_M} \right)^3 = 10 \cdot \frac{730}{590} \cdot 5^3 = 1547 \text{ l/s} = 1,547 \text{ m}^3/\text{s}$$

Înălțimea de pompare, la turația n , se determină cu relația (9.4):

$$H = H_M \left(\frac{n}{n_M} \right)^2 \left(\frac{D}{D_M} \right)^2 = 1,02 \left(\frac{730}{590} \right)^2 \left(\frac{5}{1} \right)^2 = 39,04 \text{ m}$$

- 9.3.** Pentru un regim de funcționare la turația $n'=2980$ rot/min, o pompă centrifugă are următorii parametrii: $Q'=140$ m³/h; $H'=25,4$ m, $P'=18,45$ kW. Care sunt valorile parametrilor pompei la turația $n=2500$ rot/min, într-un regim similar de funcționare?

Soluție

Performanțele pompei la turația n , în regim de funcționare similar cu cel dat se obțin cu relațiile (9.6):

$$Q = Q' \frac{n}{n'} = 140 \cdot \frac{2500}{2980} = 117,46 \text{ m}^3/\text{h}$$

$$H = H' \left(\frac{n}{n'} \right)^2 = 25,4 \left(\frac{2500}{2980} \right)^2 = 18,161 \text{ m}$$

$$P = P' \left(\frac{n}{n'} \right)^3 = 18,45 \left(\frac{2500}{2980} \right)^3 = 10,896 \text{ kW}$$

- 9.4. O pompă centrifugă realizează la turația $n'=960$ rot/min, debitul $Q'=935$ m³/h, sarcina $H'=25,9$ m, puterea $P'=76,726$ kW și randamentul $\eta=0,86$. Să se calculeze performanțele pompei la turația $n=1450$ rot/min, în regim de funcționare similar cu cel inițial.

Soluție

Neglijând variația randamentelor, la turația $n=1450$ rot/min, utilizând relațiile (9.6) se obțin parametrii:

$$Q = Q' \frac{n}{n'} = \frac{935}{3600} \cdot \frac{1450}{960} = 0,3923 \text{ m}^3/\text{s} = 1412 \text{ m}^3/\text{h}$$

$$H = H' \left(\frac{n}{n'} \right)^2 = 25,9 \left(\frac{1450}{960} \right)^2 = 59,087 \text{ m}$$

$$P = P' \left(\frac{n}{n'} \right)^3 = 76,726 \left(\frac{1450}{960} \right)^3 = 264,383 \text{ kW}$$

Probleme propuse

- 9.5. O pompă 12 NDS, având diametrul rotorului $D_2=460$ mm, realizează la turația $n=960$ rot/min, debitul $Q=935$ m³/h, sarcina $H=25,9$ m, puterea $P=76,726$ kW și randamentul $\eta=0,86$. Se cere:
- să se afle debitul, sarcina și puterea acestei pompei la turația dată, dacă rotorul este strunjit la diametrul $D'_2=430$ mm. Se consideră că randamentul scade cu 1% pentru fiecare 4% procente de strunjire $\left(\frac{D-D'}{D} \right)$;
 - Să se calculeze performanțele pompei cu rotorul normal, la turația $n_1=1450$ rot/min, în regim de funcționare similar cu cel dat inițial.
- 9.6. Curbele caracteristice $H(Q)$, $P(Q)$ și $\eta(Q)$ ale unei pompe centrifuge de tipul 12 NDS, cu diametrul $D=460$ mm, la turația $n=960$ rot/min, sunt date în tabelul 9.1.

Tabelul 9.1

Q [l/s]	0	40	80	120	160	200	240	280
H [m]	32,5	33	33	32,5	31,5	30	27	24,5
P [kW]	32	38	44	52	58	65	72	79
η [%]	0	34	59	74	85	91	88	85

Se cere:

- Să se recalculeze curbele date la turația $n_1=1100$ rot/min;
 - Să se recalculeze curbele date la turația n_1 , dacă rotorul pompei se strunjește la diametrul $D'=430$ mm.
- 9.7. Rotorul unei pompe centrifuge 10 D-9 are diametrul exterior $D=366$ mm și realizează parametrii $Q=156,7$ l/s și $H=38,21$ m. Să se determine procentul de strunjire a rotorului astfel încât pompa să realizeze parametrii $Q_A=150$ l/s și $H=35$ m.

CAPITOLUL 10

TURBOPOMPE ȘI VENTILATOARE

Noțiuni teoretice

Atât turbopompele cât și ventilatoarele fac parte din categoria generatoarelor hidraulice la care transferul energetic se efectuează prin intermediul unui rotor paletat. Ambele tipuri de mașini există atât în varianta centrifugă, la care fluidul existent în rotor este împins spre periferia acestuia sub acțiunea forței centrifuge, cât și în varianta axială la care paletetele rotorice se realizează sub forma unei înșiruii de palete hidrodinamice, dispuse sub unghiuri de așezare diferite, de la butuc spre periferie.

Parametrii energetici ai turbopompelor sunt:

- înălțimea de pompare, care conform definiției se calculează cu relația:

$$H = \left(z + \frac{p}{\gamma} + \frac{\alpha v^2}{2g} \right)_e - \left(z + \frac{p}{\gamma} + \frac{\alpha v^2}{2g} \right)_i \quad (10.1)$$

- puterea utilă dezvoltată de turbopompă:

$$P_u = \rho g Q H \quad (10.2)$$

- puterea absorbită de la motorul de antrenare:

$$P = M \omega \quad (10.3)$$

(unde M este cuplul la arbore, iar ω este viteza unghiulară)

- randamentul pompei:

$$\eta = P_u / P = \eta_h \eta_m \eta_v \quad (10.4)$$

(unde η_h , η_m , η_v reprezintă respectiv randamentul hidraulic, randamentul mecanic și randamentul volumic)

- rezerva energetică anticavitatională a pompei:

$$NPSH_i = \frac{p_a}{\gamma} + \frac{v_a^2}{2g} - \frac{p_v}{\gamma} \quad (10.5)$$

unde presiunea p_a și viteza v_a sunt determinate în gura de aspirație a pompei.

Curbele caracteristice ale turbopompelor sunt $H(Q)$, $P(Q)$ și $\eta(Q)$.

Parametrii energetici ai ventilatoarelor sunt:

- presiunea totală reală a ventilatorului:

$$\Delta p_t = \left(p_{sr} + \frac{\rho_r v_r^2}{2} \right) - \left(p_{sa} + \frac{\rho_a v_a^2}{2} \right) \quad (10.6)$$

(unde p_{sr} , p_{sa} sunt presiunile statice în refulare și respectiv aspirație, iar v_r , v_a sunt vitezele corespunzătoare);

- puterea utilă dezvoltată de ventilator:

$$P_u = Q \Delta p_t \quad (10.7)$$

- puterea absorbită de la motorul de antrenare:

$$P = M \omega = P_h + P_m \quad (10.8)$$

(unde P_h este puterea aerodinamică utilizată de ventilator pentru vehicularea gazului și P_m este puterea consumată pentru acoperirea frecărilor);

- randamentul ventilatorului:

$$\eta = \frac{P_u}{P} = \frac{Q \Delta p_t}{P} \quad (10.9)$$

Curbele caracteristice ventilatoarelor sunt $\Delta p_t(Q)$, $P(Q)$ și $\eta(Q)$.

Aplicații

Probleme rezolvate

- 10.1.** La încercarea unei pompe centrifuge care are racordurile de intrare (aspirație) și de ieșire (refulare) egale cu $d_i=80\text{mm}$ și $d_e=60\text{mm}$ (figura 10.1) s-au obținut următoarele date: indicația manometrului de la ieșirea din pompă: $p_2=1,3\text{ bar}$; indicația vacuummetrului de la intrarea în pompă: $p_1=-0,3\text{ bar}$; cota secțiunii de ieșire față de axa pompei: $h=100\text{mm}$; cota manometrului de ieșire față de secțiunea de ieșire din pompă: $a=500\text{mm}$; debitul pompei: $Q=10\text{l/s}$; cuplul la arborele pompei: $M=15\text{Nm}$ și turația pompei: $n=1450\text{rot/min}$.
Să se determine înălțimea de pompare, puterea absorbită de la motor și randamentul pompei.

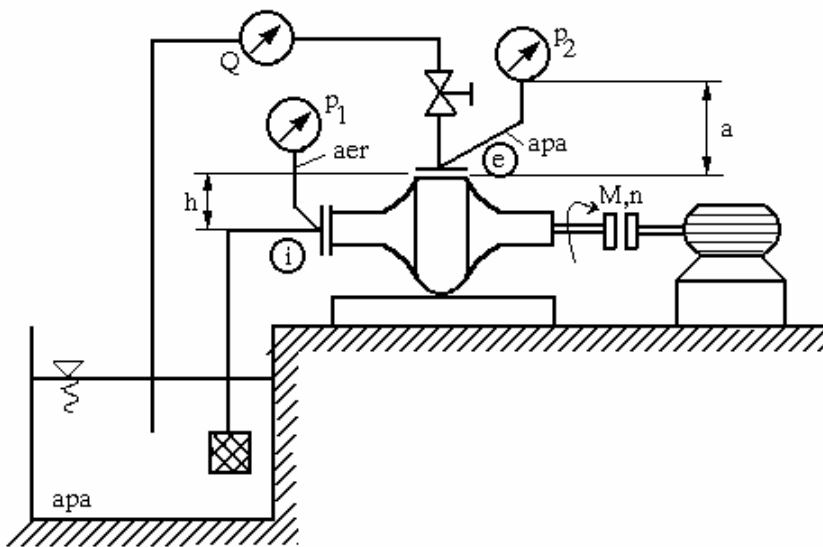


Figura 10.1.

Soluție

Calculul înălțimii de pompare se face cu relația (10.1), unde presiunile în racorduri se obțin în funcție de indicațiile corespunzătoare ale manometrului și vacuummetrului și de înălțimea și natura coloanei de lichid de pe conducta de legătură:

$$p_e = p_2 + \rho_{\text{apă}} g a$$

$$p_i = p_1 + \rho_{\text{aer}} g (a+h),$$

vitezele medii pe secțiune, corespunzătoare celor două racorduri se exprimă în funcție de debit și aria secțiunii

$$v_e = \frac{Q}{A_e} = \frac{4Q}{\pi \cdot d_e^2} \quad v_i = \frac{Q}{A_i} = \frac{4Q}{\pi \cdot d_i^2}$$

coeficienții de neuniformitate ai vitezelor pe secțiune se consideră $\alpha_e = \alpha_i \cong 1$, iar între cotele z_i și z_e se observă că există relația $z_e - z_i = h$.

Făcând aceste înlocuiri în relația (10.1), rezultă:

$$\begin{aligned} H &= \frac{p_e - p_i}{\gamma} + \frac{\alpha_e v_e^2 - \alpha_i v_i^2}{2g} + z_e - z_i = \\ &= \frac{p_2 - p_1}{\gamma_{\text{apă}}} + a + \frac{\rho_{\text{aer}}}{\rho_{\text{apă}}} (a+h) + \frac{8Q^2}{\pi^2 g} \left(\frac{1}{d_e^4} - \frac{1}{d_i^4} \right) + h \end{aligned}$$

Deoarece $\rho_{\text{aer}}/\rho_{\text{apă}} \cong 1/800$, termenul respectiv se neglijează, ceea ce conduce la:

$$H = \frac{p_2 - p_1}{\gamma_{apa}} + a + h + \frac{8Q^2}{\pi^2 g} \left(\frac{1}{d_e^4} - \frac{1}{d_i^4} \right) =$$

$$\frac{1,3 \cdot 10^5 + 0,3 \cdot 10^5}{9810} + 0,5 + 0,1 + \frac{8 \cdot 0,01^2}{\pi^2 \cdot 9,81} \left(\frac{1}{0,06^4} - \frac{1}{0,08^4} \right) = 17,351m$$

Puterea absorbită de pompă de la motorul de antrenare se calculează cu relația (10.3), unde $\omega = \pi n / 30 = 1450\pi / 30 = 151,84 \text{ rad/s}$

Rezultă:

$$P = M\omega = 15,151,84 \approx 2277,7 \text{ W}$$

Puterea utilă dezvoltată de pompă se calculează cu relația (10.2), adică:

$$P_u = \rho g Q H = 1000,9,81,0,01,17,351 = 1701,6 \text{ W}$$

Randamentul pompei are valoarea:

$$\eta = P_u / P = 1701,6 / 2277,7 = 0,7471, \text{ adică } \eta = 74,71\%.$$

- 10.2.** La încercarea unei pompe centrifuge, într-o instalație ca cea din figura 10.2, se obține un regim de funcționare căruia îi corespund următoarele valori măsurate: $Q = 140 \text{ m}^3/\text{h}$; $n = 2980 \text{ rot/min}$; $p_{ma} = -0,17 \text{ kgf/cm}^2$; $p_{mr} = 2,22 \text{ kgf/cm}^2$, diferența de nivel dintre refulare și aspirație $z_r - z_a = 0,2 \text{ m}$; diferența de nivel dintre manometrele de măsură a celor două presiuni și axa pompei $a_Q - a_r = 0,5 \text{ m}$; puterea electrică absorbită de motorul de antrenare $P_e = 21,2 \text{ kW}$, iar curba randamentului motorului electric este dată în figura 10.3. Temperatura apei din circuit este de 18°C , iar presiunea barometrică $p_{at} = 748 \text{ mm Hg}$. Se mai dau diametrele ștuțurilor de aspirație și refulare $d_a = 100 \text{ mm}$ și $d_r = 80 \text{ mm}$. Să se determine sarcina, puterea, randamentul și NPSH-ul pompei, pentru regimul de funcționare dat.

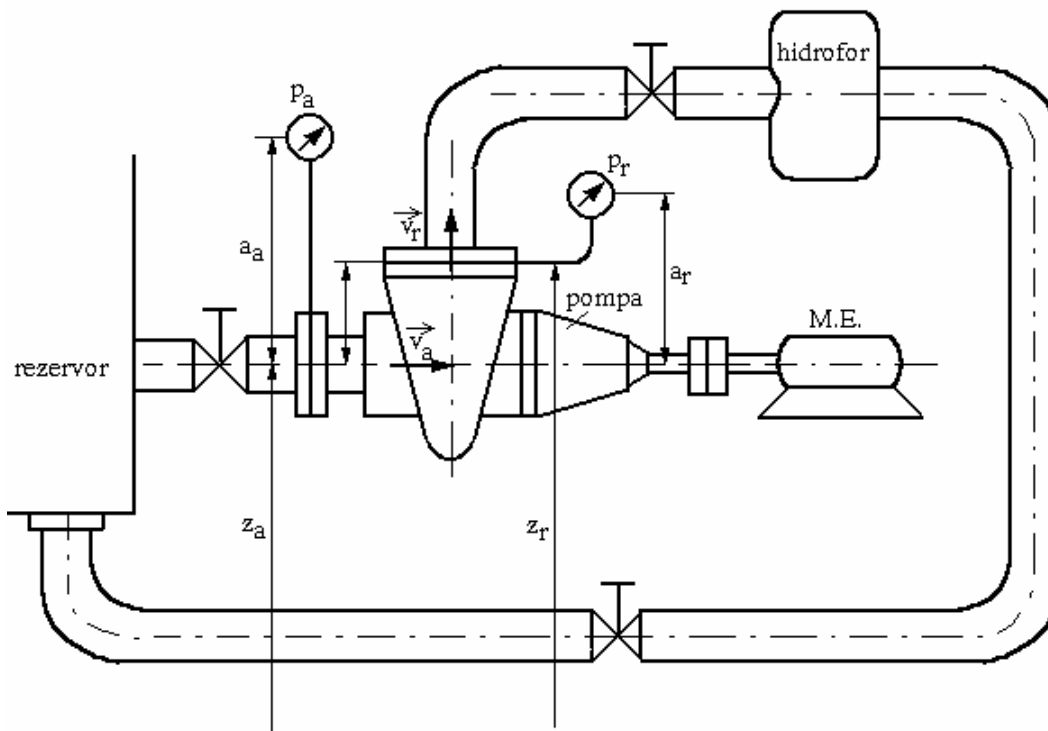


Figura 10.2.

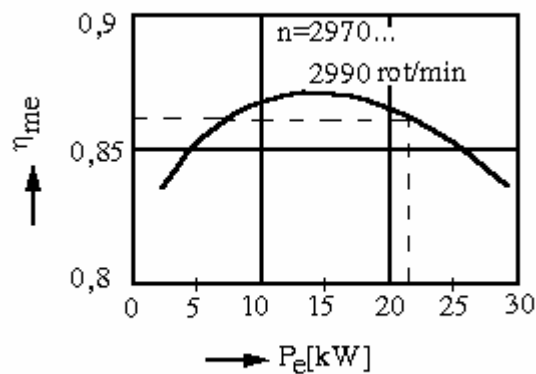


Figura 10.3.

Soluție

Vitezele în secțiunile de intrare și de ieșire sunt:

$$v_a = \frac{4Q}{\pi \cdot d_a^2} = \frac{4 \cdot 140}{3600 \cdot \pi \cdot 0,1^2} = 4,95 \text{ m/s}$$

$$v_r = \frac{4Q}{\pi \cdot d_r^2} = \frac{4 \cdot 140}{3600 \cdot \pi \cdot 0,08^2} = 7,74 \text{ m/s}$$

Sarcina pompei este:

$$H = z_r - z_a + (p_r - p_a) / \gamma + (v_r^2 - v_a^2) / 2g$$

unde:

$$\begin{aligned} p_r - p_a &= p_{at} + p_{mr} - (p_{at} + p_{ma}) + \rho g(a_r - a_a) = p_{mr} - p_{ma} + \rho g(a_r - a_a) = \\ &= 2,22 + 0,17 - 0,5 = 2,34 \text{ kgf/cm}^2 = 2,34 \cdot 9,81 \cdot 10^4 \text{ N/m}^2 = 229554 \text{ N/m}^2 \end{aligned}$$

Rezultă:

$$H = 0,2 + 229554 / 9810 + (7,74^2 - 4,95^2) / 2 \cdot 9,81 = 25,4 \text{ m}$$

Pentru $P_e = 21,2 \text{ kW}$, pe curba de tarare a motorului se găsește randamentul $\eta_{me} = 0,87$, cu care se află puterea mecanică absorbită de pompă:

$$P = P_e \eta_{me} = 21,2 \cdot 0,87 = 18,45 \text{ kW}$$

și randamentul acesteia în punctul de funcționare:

$$\eta = \frac{\rho g Q H}{P} = \frac{1000 \cdot 9,81 \cdot 140 \cdot 25,4}{18,45 \cdot 10^3 \cdot 3600} = 0,533$$

Valoarea $NPSH_i$, pentru pompă, în punctul de funcționare se calculează cu relația (10.5), unde:

$$p_a = p_{ma} + p_{at} = -0,17 \cdot 10^3 + 99,72 \cdot 10^3 = 99,55 \cdot 10^3 \text{ N/m}^2$$

cu

$$p_{at} = 748 \text{ mmHg} = 748 \cdot 133,322 \text{ N/m}^2 = 99,72 \cdot 10^3 \text{ N/m}^2$$

$$p_{ma} = -0,17 \text{ kgf/cm}^2 = -0,17 \cdot 10^3 \text{ N/m}^2$$

$$p_v|_{t=18^\circ\text{C}} = 0,21 \text{ mH}_2\text{O} = 0,21 \cdot 9,80665 \cdot 10^3 \text{ N/m}^2 = 2,059 \cdot 10^3 \text{ N/m}^2$$

Rezultă

$$NPSH_i = \frac{p_a - p_v}{\gamma} + \frac{v_a^2}{2g} = \frac{(99,55 - 2,059) \cdot 10^3}{9810} + \frac{4,95^2}{2 \cdot 9,81} = 11,17 \text{ m}$$

10.3. La încercarea unui ventilator centrifugal, cu datele nominale: $Q_n = 9900 \text{ m}^3/\text{h}$, $\Delta p_t = 36 \text{ mmHg}$, $n_n = 930 \text{ rot/min}$, $P = 1,985 \text{ kW}$, presiunea și temperatura aerului atmosferic au fost $p_0 = 775 \text{ mmHg}$

și $t_a=24$ °C. Pentru măsurarea debitului s-a utilizat un set de diafragme, cu diametrele deschiderii $d=0; 125; 200; 280; 375; 425$ mm. Conducta de măsură (de aspirație) a avut diametrul $D_a=500$ mm, iar secțiunea ștuțului de refulare a fost egală cu cea a conductei de aspirație. Brațul balanței de măsură a cuplului la arbore a fost $r=50$ cm. Valorile măsurate în timpul încercării ventilatorului sunt date în tabelul 10.1. Să se calculeze și să se reprezinte grafic curbele $\Delta p_t(Q)$, $P(Q)$ și $\eta(Q)$.

Tabelul 10.1.

Nr. crt.	Diametrul diafragmei, d[mm]	Presiunea statică Δp_t , [mmH ₂ O]	Depresiunea p_0-p_a , [mmH ₂ O]	Forța la brațul balanței, F[N]
1	0	74	74	14,617
2	125	85	77	20,012
3	200	95	81	28,06
4	280	97	70	36,40
5	375	90	52	43,16
6	425	80	43	46,60

Soluție

Debitul se calculează cu relația:

$$Q = 0,01252 \cdot \alpha \cdot \varepsilon \cdot d^2 \sqrt{\frac{\Delta p}{\rho}} \quad [\text{m}^3/\text{h}]$$

unde: Δp se ia din tabelul 10.1,

$\alpha=0,6$ - coeficientul de debit al diafragmei,

$\varepsilon=\Delta p_{\text{mediu}}/p_0=0,00825$ - coeficientul de expansiune,

d - se ia din tabelul 10.1,

$\rho=p_0/RT=(10530,9,81)/(287,297)=1,21$ kg/m³ - densitatea aerului atmosferic.

Cuplul la arborele motorului, se determină cu relația $M=F \cdot r$ [N, m], unde F se ia din tabelul 10.1.

Puterea utilă, puterea absorbită și randamentul ventilatorului se determină cu relațiile (10.7), (10.8) și (10.9). Rezultatele au fost trecute în tabelul 10.2.

Tabelul 10.2.

Nr. crt.	Q, [m ³ /s]	Δp_t , [N/m ²]	P, [kW]	η , [%]
1	0	725,69	0,735	0
2	0,272	755,11	0,974	21
3	0,738	794,33	1,365	42,9
4	1,462	686,46	1,771	56,2
5	2,525	509,94	2,257	61,2
6	3,053	421,68	2,265	56,8

În figura 10.4 s-au reprezentat curbele caracteristice ale ventilatorului studiat.

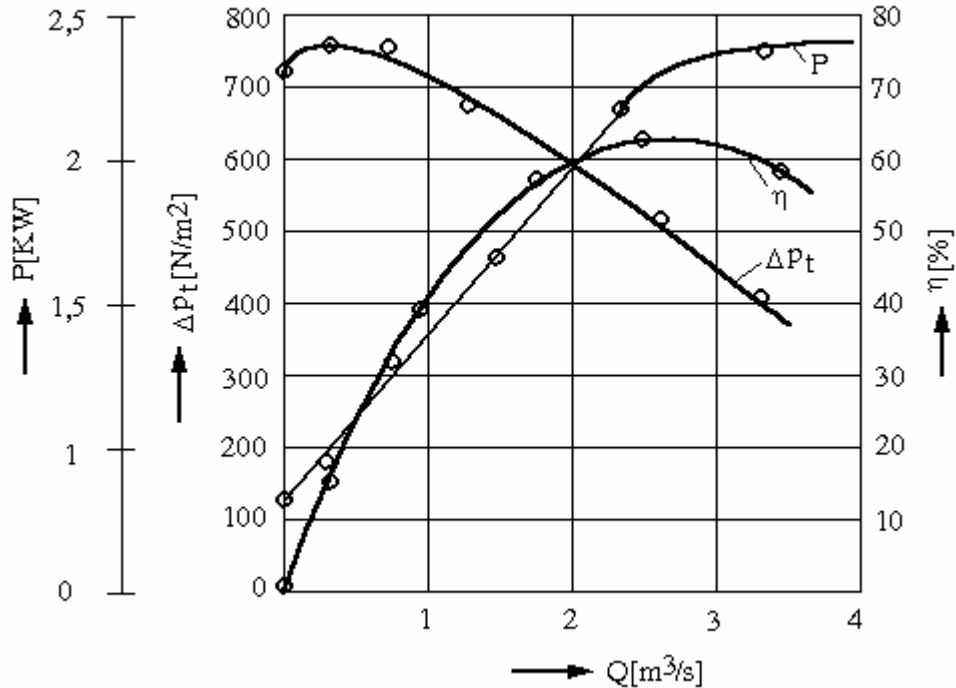


Figura 10.4.

10.4. Un ventilator axial, având datele nominale $Q_n=4 \text{ m}^3/\text{s}$, $\Delta p_t=160\text{mmH}_2\text{O}$, $n_n=3000 \text{ rot}/\text{min}$ și $P_n=8 \text{ kW}$ se încercă lucrând cu aer umed la temperatura $t_{um}=15^\circ\text{C}$. Să se calculeze debitul Q , sarcina Y , puterea P și randamentul η , într-un punct de funcționare pentru care se citesc valorile: $\Delta p_1=p_0-p_a=27,888 \text{ Pa}$, $\Delta p_2=p_r-p_0=709,15 \text{ Pa}$, $M=39,19 \text{ kgfm}$, $p_0=750 \text{ mmHg}$, $t_{us}=21^\circ\text{C}$ ($p_{us}=2490 \text{ Pa}$). Intrarea aerului în ventilator se face printr-o duză, având diametrul de intrare $D=496 \text{ mm}$, diametrul de ieșire $d=146 \text{ mm}$ și coeficientul de debit $\mu=0,99$.

Soluție.

Debitul ventilatorului se calculează cu relația

$$Q = \mu \frac{\pi}{4} (D^2 - d^2) \sqrt{\frac{2\Delta p_1}{\rho}}$$

unde ρ se determină cu relația:

$$\rho = \frac{p_0}{RT} \left(1 - 0,377 \varphi \frac{p_{us}}{p_0} \right)$$

Umiditatea φ se ia din tabele, funcție de temperatura $t=t_{us}-t_{um}=21-15=6^\circ\text{C}$. Rezultă $\varphi=0,54$.

$R=R/M=8315/28=287 \text{ J}/\text{kgK}$

$T=273+21=294 \text{ K}$

Prin urmare:

$$\rho = \frac{10^5}{287 \cdot 294} \left(1 - 0,377 \cdot 0,54 \cdot \frac{2490}{10^5} \right) = 1,179 \text{ kg/m}^3$$

Rezultă debitul:

$$Q = 0,99 \frac{\pi}{4} (0,496^2 - 0,146^2) \sqrt{\frac{2 \cdot 27,888}{1,179}} \cong 3,76 \text{ m}^3/\text{s}$$

Sarcina Y se calculează din relația:

$$Y = gH = \frac{\Delta p_t}{\rho} = \frac{\Delta p_2 + \frac{\rho v_2^2}{2}}{\rho} = \frac{\Delta p_2}{\rho} + \frac{1}{2} \cdot \frac{16Q^2}{\pi^2 d^4} = \frac{709,15}{1,179} + \frac{8 \cdot 3,76^2}{\pi^2 \cdot 0,146^2} = 25822,03 \text{ J/kg}$$

Puterea absorbită de ventilator este:

$$P = M\omega = M \cdot \frac{\pi n}{30} = 39,19 \cdot 10 \cdot \frac{\pi \cdot 3000}{30} = 123119 \text{ W}$$

Rezultă, randamentul ventilatorului:

$$\eta = \frac{\rho Q Y}{P} = \frac{1,179 \cdot 3,76 \cdot 25822,03}{123119} = 0,93$$

Probleme propuse

- 10.5.** Două ventilatoare centrifuge identice având caracteristicile $H(Q)$, $P(Q)$ și $\eta(Q)$ date în figura 10.5 sunt înseriate. Curba caracteristică a conductei fiind $H_C(Q)$, să se determine parametrii la funcționarea unui singur ventilator pe conductă.

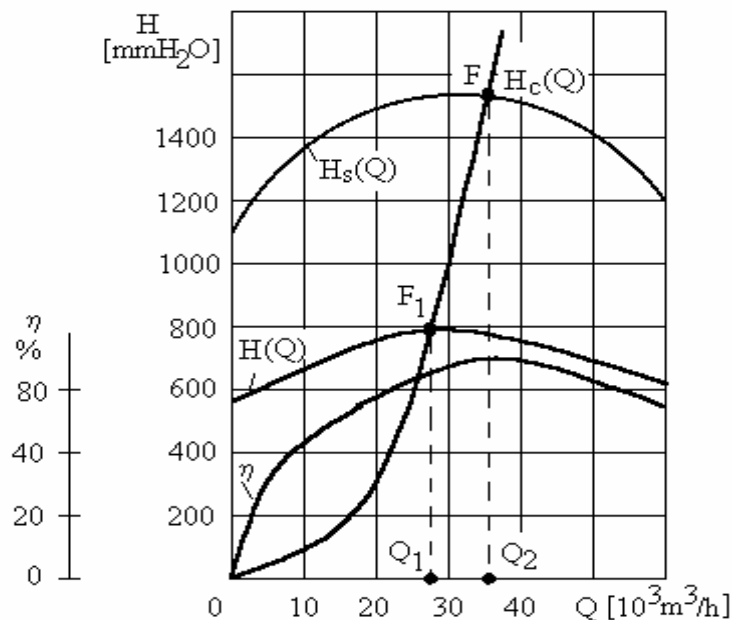


Figura 10.5.

- 10.6.** Două ventilatoare centrifuge identice, cu caracteristicile $H(Q)$, $P(Q)$ și $\eta(Q)$ date în figura 10.6 sunt montate în paralel. Pe conductă este montată o vană. La deschiderea completă a vanei, curba caracteristică este $H_C(Q)$, iar în cazul închiderii parțiale a vanei, caracteristica este $H'_C(Q)$. Să se determine debitul, sarcina, puterea și randamentul fiecărui ventilator la funcționarea în paralel pe conducta cu vana deschisă și cu vana închisă parțial.

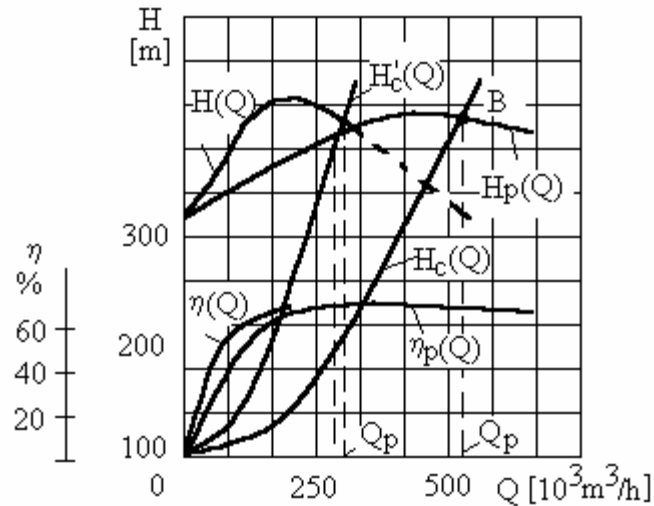


Figura 10.6.

CAPITOLUL 11

TURBINE HIDRAULICE

Noțiuni teoretice

Valorificarea potențialului hidroenergetic al unei țări se realizează în cadrul unei amenajări hidroenergetice, respectiv în centralele hidroelectrice, care utilizează ca sursă primară energia hidraulică, potențială și cinetică a căderilor de apă naturale sau artificiale.

Principalele elemente componente ale unei amenajări hidroenergetice sunt: **barajul** (care poate fi de înălțime mică și lățime mare - baraj fluvial, sau de înălțime mare și lățime mică, caracteristic zonelor montane), **aducțiunea apei** (care asigură circulația acesteia între captare și castelul de echilibru), **castelul de echilibru** (care are rolul de reducere a efectelor loviturii de berbec datorată regimului tranzitoriu al apei în conducta de aducțiune), **conducta forțată și distribuitorul** (care realizează legătura pe linia de cea mai mare pantă și traseul cel mai scurt între castelul de echilibru și turbine) și **turbinele hidraulice** (care pot fi cu acțiune - tip Pelton, sau cu reacțiune - tip Francisc, Kaplan, etc).

Calculul parametrilor principali ai turbinelor hidraulice se face după cum urmează.

Puterea hidraulică a unei turbine este:

$$P = \rho g Q H \eta \quad (11.1)$$

unde ρ este densitatea apei

g - accelerația gravitațională;

Q - debitul de apă care trece prin turbină;

H - căderea la turbină;

η - randamentul turbinei.

Deoarece funcționarea obișnuită a turbinei se face cu apă rece și curată, se poate scrie:

$$P=13,33 QH\eta; P \text{ [CP]}, Q \text{ [m}^3\text{/s]}, H \text{ [m]} \quad (11.2)$$

$$P=9,81 QH\eta; P \text{ [kW]}, Q \text{ [m}^3\text{/s]}, H \text{ [m]} \quad (11.3)$$

Cel mai important criteriu de clasificare a turbinelor este rapiditatea, care se determină cu relația:

$$n_s = \frac{n}{H} \sqrt{\frac{P}{\sqrt{H}}} \quad n \text{ [rot/min]}, H \text{ [m]}, P \text{ [CP]} \quad (11.4)$$

Pentru construcția caracteristicilor universale (topograme), se utilizează **debitul dublu unitar** și **turația dublu unitară**, care se calculează cu relațiile:

$$Q'_1 = \frac{Q}{D_1^2 \sqrt{H}}; \quad n'_1 = \frac{nD_1}{\sqrt{H}} \quad (11.5)$$

unde D_1 este diametrul maxim de intrare al rotorului.

Dacă se dau puterea nominală (instalată) P [kW] și căderea netă de calcul H_c [m] a turbinei, diametrul nominal al rotorului se determină din relația (11.5)

$$D_1 = \sqrt{\frac{Q}{Q'_1 \sqrt{H_c}}} = \sqrt{\frac{9,81 H_c \eta}{Q'_1 \sqrt{H_c}}} = \sqrt{\frac{P}{9,81 \eta Q'_1 H_c \sqrt{H_c}}} \text{ [m]} \quad (11.6)$$

Cunoscând de pe topogramă randamentul optim $\eta_{M,opt}$ al modelului cu diametrul D_{1M} , randamentul optim al prototipului se calculează cu **formula lui Moody**:

$$\eta_{opt} = 1 - \left(1 - \eta_{M,opt}\right) \sqrt[5]{\frac{D_{1M}}{D_1}} \quad (11.7)$$

Înălțimea de aspirație, H_a , a unei turbine reprezintă cota deasupra nivelului aval a inelului inferior al aparatului director la turbina Francis verticală, a fusurilor paletelor rotorice, la turbina Kaplan și a axei de rotație la toate turbinele cu reacțiune orizontale. Când $H_a < 0$, turbina funcționează cu contrapresiune.

În tabelul 11.1 sunt prezentate caracteristicile de rapiditate, pentru câteva tipuri de turbine.

Tabelul 11.1. Caracteristicile de rapiditate ale turbinelor hidraulice

Turbine	Pelton	Francis	Deșiaz	Kaplan	Bulb
n_s	1-60	50-400	200-350	300-950	800-2000
lente	1-10	51-150	200-240	300-600	800-1000
normale	11-25	151-250	241-280	601-800	1001-1400
rapide	26-60	251-400	281-350	801-950	1401-2000

Aplicații

Probleme rezolvate

11.1. Să se dimensioneze o turbină Pelton, cunoscând căderea de calcul $H_c=630$ m și puterea instalată $P=65$ kW.

Soluție

Fiind o turbină de mare putere, se adoptă ax vertical și numărul de injectoare $z_0=4$. Estimând randamentul global $\eta=0,87$, se obține debitul de calcul al turbinei, din relația (11.1):

$$Q = \frac{P}{9,81 H_c \eta} = \frac{65000}{9,81 \cdot 630 \cdot 0,87} = 12,088 \quad \text{m}^3\text{/s}$$

și debitul pe fiecare injector:

$$Q_1 = Q/z_0 = 12,088/4 = 3,022 \text{ m}^3/\text{s}$$

Dar debitul pe un injector este dat de relația:

$$Q_1 = \Psi \sqrt{2gH} \frac{\pi d_0^2}{4}$$

de unde, considerând coeficientul vitezei $\Psi=0,97$, rezultă diametrul jetului la ieșirea din ajutorul injectorului:

$$d_0 = \sqrt{\frac{4Q_1}{\pi\Psi\sqrt{2gH}}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 3,022}{\pi \cdot 0,97\sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 630}}} = 0,0944 \text{ m} \cong 94 \text{ mm}$$

Diametrul de ieșire al ajutorului este:

$$d = (1,15 \dots 1,25)d_0 = 108 \dots 117,5 \text{ mm}$$

Se adoptă $d=115 \text{ mm}$

Turbina are randamentul maxim atunci când raportul dintre diametrul rotorului, socotit la intersecția axului jetului cu cupa și diametrul jetului este $D_1/d_0=13 \dots 18$, deci:

$$D_1 = (13 \dots 18)94 = 1222 \dots 1692 \text{ mm}$$

Valoarea finală a diametrului D_1 se adoptă după alegerea turației. Turația dublu unitară se alege în funcție de căderea la turbină, din tabelul 11.2.

Tabelul 11.2. Caracteristicile turbinelor Pelton, funcție de căderea la turbină

Căderea H, [m]	D_1/d_0	n'_1 , [rot/min]	Q'_1 [l/s]	n_s	numărul de cupe
300	8-11	36,5-38,5	53-28,2	29,2-20,6	17-20
400	9,4-12,5	37-39	37,7-21,7	25,5-18,4	18-21
500	1-14	37,5-39,5	28,2-17,3	22,4-16,5	19-23
750	16-19	38-40	13,2-9,35	15,5-12,45	24-28
1000	23	39,5	6,38	16,65	27-31

Pentru $H_c=630\text{m}$, se ia $n'=38,5$, valoare cu care se determină turația:

$$n = \frac{n'_1 \sqrt{H_c}}{D_1} = \frac{38,5 \sqrt{630}}{1,222 \dots 1,692} = 790,8 \dots 571 \text{ rot/min}$$

Se adoptă cea mai mare turație sincronă din acest interval, adică $n=600 \text{ rot/min}$, careia îi corespunde diametrul:

$$D_1 = \frac{n'_1 \sqrt{H_c}}{n} = \frac{38,5 \sqrt{630}}{600} = 1,611 \text{ m} \cong 1610 \text{ mm}$$

Rapiditatea turbinei este:

$$n_s = \frac{n}{H} \sqrt{\frac{P}{\sqrt{H}}} = \frac{600 \sqrt{1,36 \cdot 65000}}{630^{5/4}} = 56,52$$

Prin urmare, conform tabelului 11.1, turbina este de tip Pelton rapid.

Turația de ambalare este:

$$n_a = 1,8n = 1,8 \times 600 = 1080 \text{ rot/min}$$

11.2. La încercarea modelului unei turbine Francis, presiunea la intrare, p_i este creată de o pompă centrifugă, iar la ieșirea din aspirator, apa curge într-un canal dreptunghiular, prevăzut cu deversor pentru măsurarea debitului (figura 11.1). Înălțimea de aspirație, H_a a turbinei se determină pe baza măsurării nivelului suprafeței libere a apei în canal, în amonte de deversor. În timpul variației debitului turbinat, turația se menține constantă $n=800 \text{ rot/min}$, prin reglarea forței de strângere F , a frânei Prony. Sarcina turbinei se menține constantă cu ajutorul robinetului

montat pe by-passul pompei centrifuge. Să se determine sarcina, debitul, puterea și randamentul turbinei, în cazul aparatului director complet deschis, dacă valorile măsurate sunt următoarele: $p_i=0,037$ MPa; $y=0,77$ m; $H_a=1,45$ m; $\Delta z=0,35$ m; $d_i=0,2$ m; secțiunea de ieșire a aspiratorului $A_e=0,672$ m²; înălțimea lamei deversante $h=0,122$ m și forța de frânare $F=6,29$ N. În figura 11.2 s-a reprezentat curba debitului, funcție de înălțimea lamei deversante.

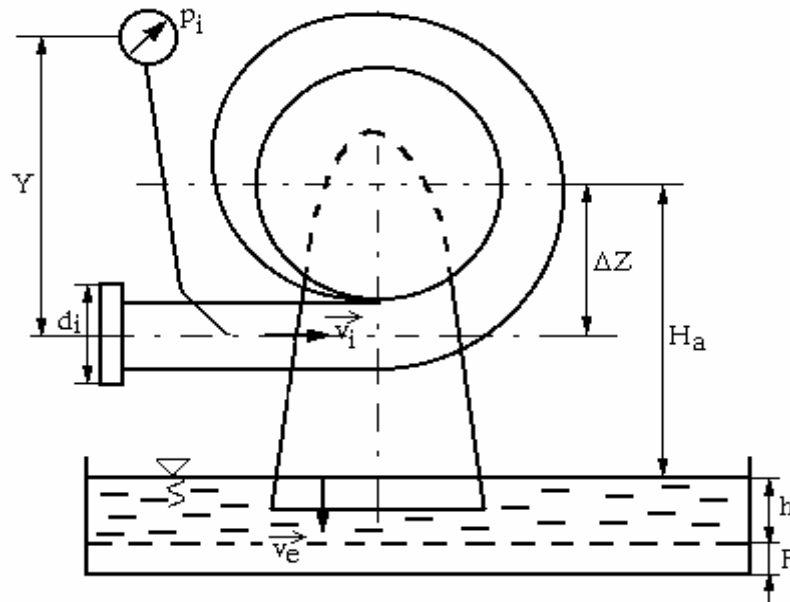


Figura 11.1.

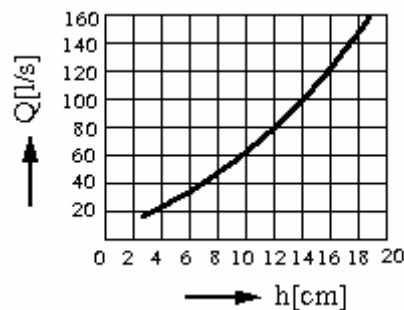


Figura 11.2. Debitul, funcție de înălțimea lamei deversante

Soluție

Corespunzător înălțimii $h=0,122$ m a lamei deversante, din fig. 11.2 rezultă debitul $Q=92$ l/s. Vitezele la intrarea în camera spirală și la ieșirea aspiratorului turbinei, rezultă din ecuația de continuitate:

$$v_i = \frac{4Q}{\pi d_i^2} = \frac{4 \cdot 0,092}{\pi \cdot 0,2^2} = 2,93 \text{ m/s} \quad ; \quad v_e = \frac{Q}{A_e} = \frac{0,092}{0,672} = 0,137 \text{ m/s}$$

Căderea la turbină, în punctul de funcționare, este:

$$H = \frac{p_i}{\gamma} + y + H_a - \Delta z + \frac{v_i^2 - v_e^2}{2g} = 3,7 + 0,77 + 1,45 - 0,35 + \frac{2,93^2 - 0,137^2}{2 \cdot 9,81} = 6,1 \text{ m}$$

Puterea la arborele turbinei este:

$$P = \frac{F \cdot n}{1,36 \cdot 10^3} = \frac{6,29 \cdot 800}{1360} = 3,7 \text{ kW}$$

Randamentul în punctul de funcționare este:

$$\eta = \frac{P}{9,81QH} = \frac{3,7}{9,81 \cdot 0,092 \cdot 6,1} = 0,682$$

adică 68,2%.

Probleme propuse

11.3. O zonă |AB|, situată pe cursul unui râu ca în figura 11.3, are următoarele caracteristici:

- lungimea zonei (măsurată pe cursul aparent al râului): $l_{AB}=2$ km;
- panta longitudinală medie a zonei: $i_{AB}=2\%$;
- Pantele medii ale malurilor, la extremitățile zonei AB: $i_A=i_B=10\%$;
- Viteza medie a râului în punctul de afluență (A): $v_A=0,4$ m/s.

Într-o perioadă de secetă (când debitul de apă al râului a fost minim) s-au obținut prin măsurare următoarele rezultate:

- lățimea râului: $b_{A \text{ min}}=5$ m;
- adâncimea medie: $h_{A \text{ med}}=0,2$ m.

Creșterea cotelor anuale ale râului în punctul de afluență este:

- $\Delta h_{A \text{ med. an}}=0,4$ m;
- $\Delta h_{A \text{ max. an}}=1$ m.

Se cere să se determine:

- a) Care ar fi puterea estimată minimă a CHE?
- b) Care ar fi diametrul turbinei hidraulice, dacă ea ar fi cuplată cu un generator sincron cu frecvența $f=50$ Hz și $p=6$ perechi de poli și ar evacua apa turbinată cu viteza $v_e=4,8$ m/s?
- c) Care ar fi puterea electrică medie anuală a CHE (corespunzătoare debitului mediu anual și înălțimii nete normale)?
- d) Cu câte grupuri (T-G) trebuie echipată CHE, pentru a fi posibilă turbinarea debitului maxim anual de apă, de la înălțimea netă normală, dacă în perioadele de secetă, când este un singur generator în funcțiune la putere minimă $P_{T-G \text{ min}}=1/3 P_{T-G \text{ nom}}$ se turbinează tot debitul de apă afluent de la înălțimea netă minimă $H_{n, \text{ min}}=H_{n, \text{ normal}}-2$ [m];
- e) Care este potențialul hidroenergetic maxim al acumulării de apă, având în vedere că lacul de acumulare din zona |AB| se umple cu apă în 20 de zile, în perioada secetoasă.

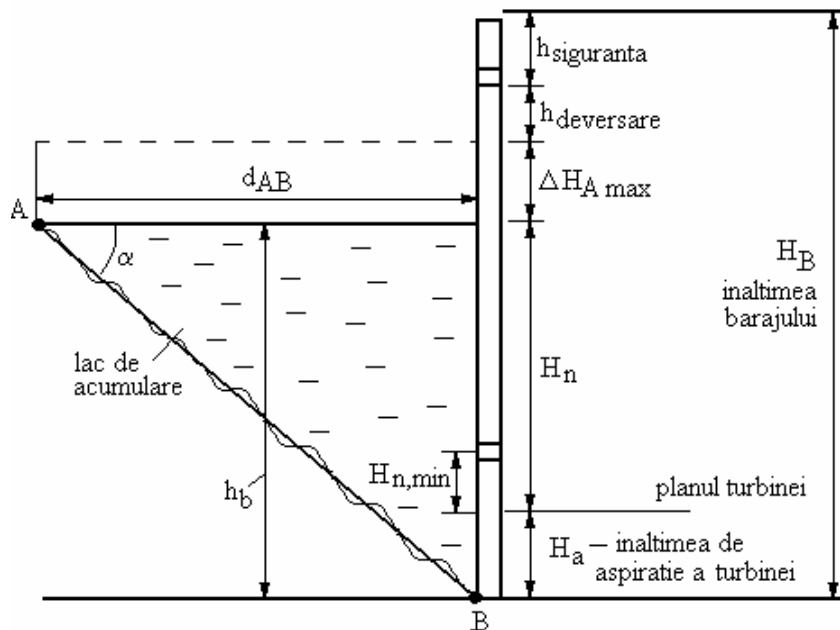


Figura 11.3.

CAPITOLUL 12

POMPE VOLUMICE

Noțiuni teoretice

Mașinile hidraulice volumice se caracterizează printr-un proces discontinuu de aspirație-refulare, proces care se realizează printr-un transfer al lichidului, în interiorul mașinii, între secțiunile de intrare și ieșire, volum cu volum. Din categoria pompelor volumice fac parte: pompa monocilindrică cu piston (cu simplu sau cu dublu efect), pompa cu pistoane radiale, pompa cu pistoane axiale, pompa cu roți dințate, pompa cu șurub, pompa cu palete glisante, pompa cu membrană, etc.

Caracteristicile energetice ale pompelor volumice sunt aceleași ca ale turbopompelor; diferă numai relațiile de calcul ale debitului și anume:

- pentru pompa monocilindrică cu piston cu simplu efect, debitul mediu teoretic este:

$$Q_t = g \frac{n}{60} = \frac{\pi D^2}{4} h \frac{n}{60} \quad (12.1)$$

unde g este cilindrul, n este turația pompei, h este cursa pistonului și D este diametrul pistonului.

Debitul mediu efectiv este:

$$Q = \eta_v Q_t \quad (12.2)$$

unde η_v este randamentul volumic al pompei.

Debitul instantaneu este:

$$q = Av \quad (12.3)$$

unde $A = \pi D^2/4$ este aria secțiunii pistonului, iar v este viteza acestuia.

- pentru pompa monocilindrică cu dublu efect, relațiile de calcul ale debitului sunt aceleași ca la pompa cu simplu efect, cu deosebirea că refularea este asigurată atât de fața dreaptă a pistonului, de arie $A = \pi D^2/4$, cât și de fața stângă a pistonului, de arie $A' = \pi(D^2 - d^2)/4$, unde d este diametrul tijei pistonului.

- pentru pompa cu pistoane radiale, debitul mediu teoretic este:

$$Q_t = \frac{\pi d^2}{2} Rz \frac{n}{60} \sin \alpha \quad (12.5)$$

unde R este raza discului de antrenare, z este numărul de pistoane axiale, iar α este unghiul de înclinare al discului de antrenare.

- pentru pompa cu roți dințate, debitul mediu teoretic este:

$$Q_t = \frac{\pi b n}{60} \left(r_e^2 - r_p^2 - \varepsilon \frac{t_0^2}{12} \right) \quad (12.6)$$

unde b este lățimea unui dinte, $\varepsilon = 4 - 6l/t_0 + 3(l/t_0)^2$, cu l - lungimea liniei de angrenare și $t_0 = 2\pi r_0/2$ - pasul pe cercul de bază, r_p este jumătatea distanței dintre centrele celor două roți și r_e este raza la vârful dinților.

- pentru pompa cu șurub, debitul mediu teoretic este:

$$Q_t = 4 \cdot e \cdot d \cdot t \cdot n \quad (12.7)$$

unde e reprezintă excentricitatea dintre axa șurubului și axa de rotație, d este diametrul rotorului, t este pasul șurubului și n este turația arborelui de antrenare.

Randamentul volumic al acestor pompe se definește ca:

$$\eta_t = Q/Q_t \quad (12.8)$$

Aplicații

Probleme rezolvate

12.1. O pompă monocilindrică cu piston cu simplu efect are diametrul pistonului $D=300$ mm, cursa $h=350$ mm și turația $n=150$ rot/min. La funcționarea pompei, sarcina este $H=200$ m, puterea este $P=148$ kW și presiunea indicată este $p_i=20,535$ bar. Să se determine debitul mediu teoretic, debitul mediu efectiv și randamentul global al pompei, dacă randamentul volumic este $\eta_v=0,9$.

Soluție

Debitul mediu efectiv se determină cu relația (12.2), unde debitul mediu teoretic este calculat cu relația (12.1):

$$Q_t = \frac{\pi D^2}{4} h \frac{n}{60} = \frac{\pi \cdot 0,3^2}{4} \cdot 0,35 \cdot \frac{150}{60} = 0,0618 \text{ m}^3 / \text{s}$$

Rezultă, debitul mediu efectiv:

$$Q = Q_t \cdot \eta_v = 0,0618 \cdot 0,9 = 0,05567 \text{ m}^3 / \text{s}$$

Randamentul global al pompei este:

$$\eta = \eta_v \eta_h \eta_m$$

unde randamentul hidraulic este:

$$\eta_h = \eta_i / \eta_v = 0,86 / 0,9 = 0,956$$

cu:

$$\eta_i = \frac{P_u}{P_i} = \frac{\rho g Q H}{p_i Q_t} = \frac{1000 \cdot 9,81 \cdot 0,05567 \cdot 200}{20,535 \cdot 10^5 \cdot 0,0618} = 0,86$$

iar randamentul mecanic este:

$$\eta_m = \frac{P_i}{P} = \frac{p_i Q_t}{P} = \frac{20,535 \cdot 10^5 \cdot 0,0618}{148 \cdot 10^3} = 0,858$$

Rezultă:

$$\eta = 0,9 \cdot 0,956 \cdot 0,858 = 0,738$$

12.2. O pompă monocilindrică cu piston, cu dublu efect, având randamentul volumic $\eta_v=0,96$; diametrul cilindrului $D=125$ mm; cursa pistonului $h=115$ mm; diametrul tijei $d=25$ mm; turația arborelui $n=60$ rot/min, lucrează cu o conductă de aspirație de diametru $d_a=70$ mm, lungime $l_a=8$ m, coeficientul de pierderi liniare $\lambda=0,029$, pe care sunt montate un sorb cu clapetă de reținere și un cot, cu coeficienții de pierderi locale $\zeta_s=2,5$ și $\zeta_c=0,33$. Pierdere maximă de sarcină în supapa de aspirație, la deschidere, este $h_{SA}^{\max}=1,2$ mH₂O. Să se determine înălțimea geometrică de aspirație maximă posibilă, dacă presiunea atmosferică este $p_0=760$ mmHg, iar presiunea de vaporizare a apei la 20 °C este $p_v=0,235$ mH₂O.

Soluție

Înălțimea geometrică maximă de aspirație se calculează cu relația:

$$H_{a,\max} = \frac{p_0 - p_v}{\gamma_{apa}} - \left(\lambda \frac{l_a}{d_a} + \zeta_s + \zeta_c \right) \frac{v_a^2}{2g} - h_{SA}^{\max} = 10,09 - 0,05 - 1,2 = 8,84 \text{ m}$$

unde:

$$p_0 = 760 \text{ mmHg} = 101325 \text{ N/m}^2$$

$$p_v = 0,235 \text{ mH}_2\text{O} = 0,0235 \text{ at} = 0,0235 \cdot 9,81 \cdot 10^4 \text{ N/m}^2 = 2305,35 \text{ N/m}^2$$

$$v_a = \frac{4Q}{\pi d_a^2} = \frac{4 \cdot 2,65 \cdot 10^{-5}}{\pi \cdot 0,07^2} = 0,6 \text{ m/s}$$

$$Q = \eta_v \cdot Q_t = 0,96 \cdot 2,38 \cdot 10^{-3} = 2,28 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$$

$$Q_t = \left[\frac{\pi D^2}{4} + \frac{\pi(D^2 - d^2)}{4} \right] h \frac{n}{60} = \frac{\pi(2D^2 - d^2)}{4} h \frac{n}{60} =$$

$$\frac{\pi(2 \cdot 0,125^2 - 0,07^2)}{4} \cdot 0,115 \cdot \frac{60}{60} = 2,38 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 / \text{s}$$

$$\left(\lambda \frac{l_a}{d_a} + \zeta_s + \zeta_c \right) \frac{v_a^2}{2g} = \left(0,029 \frac{8}{70} + 2,5 + 0,23 \right) \frac{0,6^2}{2 \cdot 9,81} = 0,05$$

$$\frac{p_0 - p_v}{\gamma_{apa}} = \frac{101325 - 2305,55}{9810} = 10,09 \text{ m}$$

12.3. O pompă cu $z=9$ pistonase radiale, de diametru $d=20\text{mm}$ și cu excentricitatea $e=8\text{mm}$ are turația $n=1450\text{rot/min}$ și realizează o creștere a presiunii $\Delta p=250\text{ bar}$.

Se cere:

- Să se afle randamentul volumic al pompei, dacă debitul măsurat este $Q=63\text{ l/min}$;
- Să se calculeze randamentul total și randamentul mecano-hidraulic al pompei, dacă la arborele pompei s-a măsurat cuplul $M=19\text{ daNm}$.

Soluție

a) Randamentul volumic al pompei se calculează cu relația (12.8), în care debitul mediu teoretic se găsește cu relația (12.4), adică:

$$Q_t = \frac{\pi \cdot d^2}{2} ezn = \frac{\pi \cdot 0,2^2}{2} \cdot 0,08 \cdot 9 \cdot 1450 = 65,6 \text{ l / min}$$

Rezultă:

$$\eta_v = Q/Q_t = 63/65,6 = 0,96$$

b) Randamentul total al pompei este:

$$\eta = P_u/P = 26250/28850 = 0,91$$

unde:

$$P_u = Q\Delta p = \frac{63 \cdot 10^{-3}}{60} \cdot 250 \cdot 10^5 = 26250 \text{ W}$$

$$P = M\omega = M \frac{\pi n}{30} = 190 \cdot \frac{\pi \cdot 1450}{30} = 28850 \text{ W}$$

Randamentul mecano-hidraulic al pompei este:

$$\eta_{mh} = \eta/\eta_v = 0,91/0,96 = 0,948$$

12.4. O pompă cu $z=7$ pistonase axiale, de diametru $d=30\text{ mm}$, ale căror axe sunt situate pe un cilindru de diametru $D=100\text{mm}$, are discul înclinat cu unghiul $\alpha=20^\circ$, turația pompei fiind $n=970\text{rot/min}$ și creșterea presiunii lichidului $\Delta p=150\text{bar}$, să se determine debitul și puterea pompei. Se estimează $\eta_v=0,95$ și $\eta=0,90$.

Soluție

Debitul mediu efectiv este:

$$Q = \eta_v Q_t = 0,95 \cdot 2,9 \cdot 10^{-3} = 2,7 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}.$$

unde Q_t se calculează cu relația (12.5), adică

$$Q_t = \frac{\pi d^2}{2} R \cdot z \cdot \frac{n}{60} \sin \alpha = \frac{\pi \cdot 0,03^2}{2} \cdot \frac{0,1}{2} \cdot 7 \cdot \frac{970}{60} \sin 20^\circ = 2,9 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$$

Puterea pompei este:

$$P = \frac{Q\Delta p}{\eta} = \frac{2,7 \cdot 10^{-3} \cdot 150 \cdot 10^5}{0,9} = 45000 \text{ W}$$

12.5. O pompă cu roți dințate, cu angrenare exterioară, având turația $n=1450$ rot/min, realizează o creștere a presiunii uleiului $\Delta p=110$ bar. Cunoscând diametrul exterior $D_e=44$ mm, distanța dintre centrele celor două roți $D_p=36$ mm, lățimea dinților $b=15$ mm, numărul de dinți $z=9$, precum și unghiul de angrenare $\alpha=20^\circ$ și estimând randamentul $\eta_v=0,9$ și $\eta_{mh}=0,85$ să se calculeze debitul și puterea de antrenare a pompei.

Soluție

Debitul pompei este:

$$Q = \eta_v Q_t = 0,9 \cdot 0,167 \cdot 10^{-3} = 0,15 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$$

unde Q_t se calculează cu relația (12.6), adică

$$Q_t = \frac{\pi \cdot b \cdot n}{60} \left(r_e^2 - r_p^2 - \varepsilon \frac{t_0^2}{12} \right) =$$

$$\frac{\pi \cdot 0,016 \cdot 1450}{60} \left(0,022^2 - 0,018^2 - 1,69 \frac{0,01256^2}{12} \right) = 0,167 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 / \text{s}$$

unde:

$$r_e = D_e/2 = 44/2 = 22 \text{ mm}$$

$$r_p = D_p/2 = 36/2 = 18 \text{ mm}$$

$$\varepsilon = 4 - 6 \frac{l}{t_0} + 3 \left(\frac{l}{t_0} \right)^2 = 4 - 6 \cdot 6,55/12,56 + 3(6,55/12,56)^2 = 1,69$$

$$l = r_p \operatorname{tg} \alpha = 18 \operatorname{tg} 20^\circ = 6,55 \text{ mm}$$

$$t_0 = 2\pi r_p / z = 2\pi \cdot 18 / 9 = 12,56 \text{ mm}$$

Puterea de antrenare a pompei este:

$$P = \frac{Q\Delta p}{\eta_{mh} \eta_v} = \frac{0,15 \cdot 10^{-3} \cdot 110 \cdot 10^5}{0,9 \cdot 0,85} \cong 2156,8 \text{ W}$$

Probleme propuse

12.6. O pompă cu $z=9$ pistoane radiale de diametru $d=0,025$ m și cu excentricitatea $e=0,010$ m, are turația $n=960$ rot/min și realizează creșterea presiunii $\Delta p=210 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$.

a) Să se afle randamentul volumic al pompei, dacă debitul măsurat este $Q=80$ l/min;

b) Să se calculeze randamentul total și randamentul mecanic al pompei, dacă momentul măsurat la arborele pompei este $M=320$ Nm..

12.7. Să se determine randamentul volumic, mecanic și total al unei pompe cu pistoane axiale cu corp înclinat, știind că: pompa este antrenată la turația $n=1450$ rot/min; presiunea maximă $\Delta p=300 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$; volumul geometric (cilindreea, pentru un unghi de înclinare a blocului cu cilindri $\alpha=25^\circ$) $V=31,1 \text{ cm}^3/\text{rot}$; debitul nominal $Q_n=42,5$ l/min și cuplul nominal la arbore $M_n=164,4$ Nm.

- 12.8.** Să se determine puterea de antrenare și randamentul total al unei pompe cu pistoane axiale antrenată la turația $n=1450$ rot/min, pentru presiunea de lucru $p=210 \cdot 10^5$ N/m² și debitul $Q=82$ l/min. Se estimează randamentul volumic $\eta_v=0,95$.

CAPITOLUL 13

ACȚIONĂRI HIDRAULICE

Noțiuni teoretice

Acționarea hidraulică presupune o conversie de energie de tip mecano-hidro-mecanică, pentru învingerea unor forțe sau cupluri rezistente, conform unui program dat.

În principiu, un sistem de acționare hidraulică conține o pompă hidrostatică, un element de execuție, care este motorul hidraulic cu mișcare de rotație sau translație și instalații auxiliare în care intră aparatura de distribuție, reglare și control, conductele de legătură, rezervoarele de lichid, acumulatele, filtrele, etc.

Aparatajul de distribuție asigură dirijarea lichidului de lucru către elementele sistemului, determinând succesiunea fazelor de lucru. Cele mai utilizate în acest sens sunt distribuitorii cu sertar, a căror caracteristică se calculează cu relația:

$$Q = \mu \pi d x \sqrt{\frac{2g\Delta p}{\gamma}} = G \sqrt{\Delta p} \quad (13.1)$$

unde μ este coeficientul de debit ($\mu=0,6 \dots 0,65$), d este diametrul sertărașului distribuitorului, x este lungimea de deschidere, Δp este căderea de presiune pe distribuitor, iar $G = \mu \pi d x \sqrt{2g/\gamma}$ este conductivitatea hidraulică.

Aparatajul de reglare este destinat reglajului de viteză sau de presiune în sistemul de acționare hidraulică. Reglarea vitezei se poate face pe cale volumică, cu ajutorul unei pompe cu debit reglabil sau pe cale rezistivă, cu ajutorul unei rezistențe hidraulice reglabile, numită drosel. Reglarea presiunii se face cu supape care pot fi normale închise (ex. supape de siguranță, supape de deversare) sau normale deschise (ex. supape de reținere, supape de reducere, etc.).

Relația debitului prin supapă, într-un regim staționar, este identică cu relația debitului prin drosel:

$$Q = \mu A_s \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}} \quad (13.2)$$

unde A_s este secțiunea de trecere prin supapă, pentru o anumită poziție a ventilului, în raport cu scaunul supapei.

Aplicații

Probleme rezolvate

13.1. Cilindrul diferențial 1, din figura 13.1. are diametrul pistonului $D=110\text{mm}$ și diametrul tijei $d=80\text{mm}$. Se conectează, pe rând, fiecare față a pistonului la presiunea dată de pompa 2, $p=100\text{bar}$. Pe fața opusă, conectată prin droselul reglabil 5 la rezervorul 6, se exercită presiunea $p_0=10\text{bar}$. Debitul dat de pompă este $Q=1\text{l/s}$. Să se determine vitezele și forțele dezvoltate de piston la cursa spre dreapta (v_1, F_1) și la cursa spre stânga (v_2, F_2) cunoscând randamentul volumic al celor două sensuri $\eta_{v1}=\eta_{v2}=1$, randamentul mecano-hidraulic al feței fără tijă $\eta_{mh1}=0,92$ și al celei cu tijă $\eta_{mh2}=0,9$.

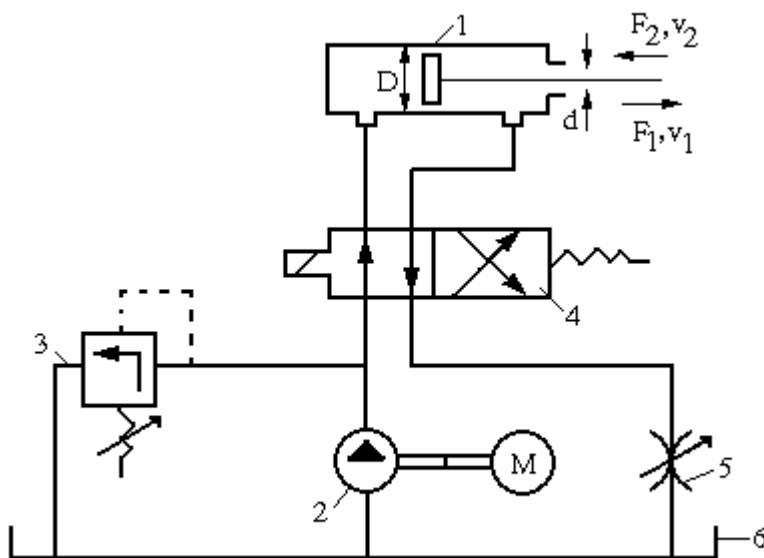


Figura 13.1. Schema de lucru

- 1 – cilindru hidraulic;
- 2 – pompă;
- 3 – supapă de descărcare;
- 4 – distribuitor cu sertar tip 4/2;
- 5 – drosel;
- 6 – rezervor.

Soluție

Ariile fețelor care refulează ale pistonului sunt:

- aria fără tijă:

$$A = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{\pi \cdot 11^2}{4} = 95,033 \text{ cm}^2$$

- aria cu tijă:

$$A = \frac{\pi(D^2 - d^2)}{4} = \frac{\pi(11^2 - 8^2)}{4} = 44,768 \text{ cm}^2$$

La deplasarea spre dreapta, viteza și forța se determină cu relațiile:

$$v_1 = \frac{Q \eta_{v1}}{A} = \frac{10^3 \cdot 1}{95,033} = 10,52 \text{ cm/s} = 0,1052 \text{ m/s}$$

$$F_1 = pA\eta_{mh1} - \frac{p_0 A'}{\eta_{mh2}} = 100 \cdot 10^5 \cdot 95,033 \cdot 10^{-4} \cdot 0,92 - \frac{10 \cdot 10^5 \cdot 44,768 \cdot 10^{-4}}{0,9} = 82456 N$$

La deplasarea spre stânga, viteza și forța se determină cu relațiile:

$$v_2 = \frac{Q\eta_{v2}}{A'} = \frac{10^3 \cdot 1}{44,768} = 22,3 \text{ cm/s} = 0,223 \text{ m/s}$$

$$F_2 = pA'\eta_{mh2} - \frac{p_0 A}{\eta_{mh1}} = 100 \cdot 10^5 \cdot 44,768 \cdot 10^{-4} \cdot 0,9 - \frac{10 \cdot 10^5 \cdot 95,033 \cdot 10^{-4}}{0,92} = 29962 N$$

- 13.2.** Să se determine întârzierea cu care servomotorul din figura 13.2, aflat sub sarcină, începe mișcarea după ce distribuitorul cu sertar pune în comunicație pompa cu servomotorul. Se cunosc: creșterea necesară a presiunii de la valoarea inițială p_0 la valoarea finală p , respectiv $\Delta p = p - p_0 = 100$ bar; debitul pompei $Q = 6$ l/min; modulul de elasticitate al uleiului $\varepsilon = 14$ MPa; volumul de ulei de la pompă până la pistonul servomotorului $v_0 = 28 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$.

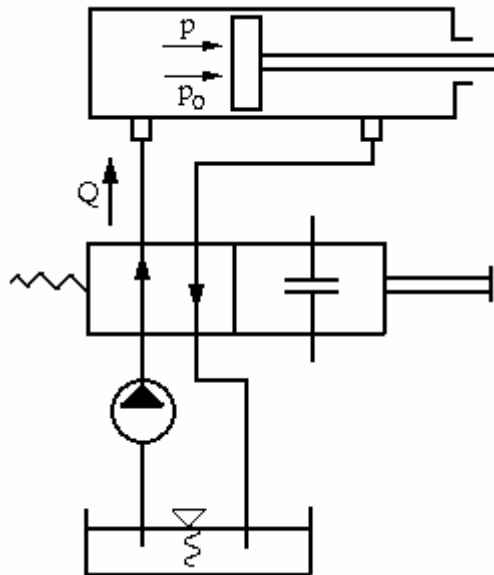


Figura 13.2.

Soluție

Pomparea trebuie să compenseze acumularea de ulei datorită comprimării și apoi pune în mișcare pistonul servomotorului. Volumul suplimentar introdus în circuit, până la deschiderea drumului de la pompă la servomotor, datorită comprimării este:

$$\Delta v = \frac{v_0 \Delta p}{\varepsilon} = \frac{28 \cdot 10^{-3} \cdot 100 \cdot 10^5}{14 \cdot 10^6} = 0,0002 \text{ m}^3$$

Întârzierea cu care servomotorul începe mișcarea este:

$$t = \Delta v / Q = \frac{2 \cdot 10^{-4}}{0,1 \cdot 10^{-3}} = 2 \text{ s}$$

unde $Q = 6 \text{ l/min} = 6/60 \text{ dm}^3/\text{s} = 0,1 \text{ dm}^3/\text{s} = 0,1 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$.

- 13.3.** Cilindrul de forță cu simplu efect din figura 13.3. are modulul de elasticitate $E=2 \cdot 10^9$ MPa, diametrul $D=100$ mm, lungimea $l=1$ m și grosimea peretelui $\delta=6$ mm. Așupra pistonului acționează o forță F , uniform crescătoare în timpul $\Delta t=0,6$ s, de la valoarea $F_0=35000$ N, la valoarea $F_1=45000$ N. Forța de frecare a pistonului cu cilindrul fiind $0,01F$, se cere viteza pistonului în timpul creșterii presiunii, dacă valoarea sa inițială este $v_0=0,002$ m/s și debitul pompei care alimentează cilindrul este independent de presiune. Modulul de elasticitate al uleiului este $\varepsilon=1,333 \cdot 10^7$ MPa.

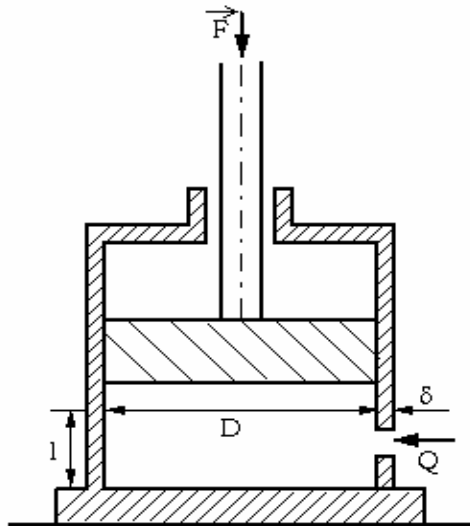


Figura 13.3.

Soluție

Secțiunea cilindrului este:

$$A = \pi D^2 / 4 = \pi \cdot 0,1^2 / 4 = 0,007854 \text{ m}^2 = 78,54 \text{ cm}^2 = 78,54 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$$

Presiunea produsă de piston, la începutul și sfârșitul intervalului Δt , ținând seama de frecarea cu cilindrul, este:

$$p_0 = \frac{0,99 \cdot F_0}{A} = \frac{0,99 \cdot 35000}{78,54 \cdot 10^{-4}} = 44,118 \cdot 10^3 \text{ MPa}$$

$$p_1 = \frac{0,99 \cdot F_1}{A} = \frac{0,99 \cdot 45000}{78,54 \cdot 10^{-4}} = 56,725 \cdot 10^3 \text{ MPa}$$

Rezultă creșterea de presiune:

$$\Delta p = p_1 - p_0 = (56,725 - 44,118) \cdot 10^3 = 12,605 \cdot 10^3 \text{ MPa}$$

Această creștere de presiune produce o creștere a diametrului cilindrului:

$$\Delta D = D \frac{\Delta \sigma}{E} = \frac{D}{E} \cdot \frac{\Delta p \cdot D}{2\delta} = \frac{\Delta p D^2}{2\delta E} = \frac{12,605 \cdot 10^3 \cdot 0,1^2}{2 \cdot 0,006 \cdot 2 \cdot 10^9} = 0,525 \cdot 10^{-5} \text{ cm}$$

Această creștere a diametrului (fără modificarea lungimii l), conduce la o creștere a volumului cilindrului:

$$\Delta v_1 = \pi D \frac{\Delta D}{2} l = \pi \cdot 0,1 \cdot \frac{0,525 \cdot 10^{-5}}{2} = 0,825 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3$$

În volumul $v_0 = A \cdot l = 78,54 \cdot 10^{-4} = 78,54 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3$, datorită creșterii presiunii, încapă un volum suplimentar de ulei:

$$\Delta v_2 = \frac{\Delta p v_0}{\varepsilon} = \frac{12,605 \cdot 10^9 \cdot 78,54 \cdot 10^{-4}}{1,333 \cdot 10^{13}} = 7,423 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3$$

Prin urmare, creșterea totală a volumului de ulei este:

$$\Delta v = \Delta v_1 + \Delta v_2 = (0,825 + 7,427) \cdot 10^{-6} = 8,252 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3$$

Rezultă o pierdere aparentă de debit:

$$Q_a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{8,252 \cdot 10^{-6}}{0,6} = 13,753 \cdot 10^{-6} \text{ cm}^3/\text{s}$$

Debitul Q al pompei trebuie să compenseze această pierdere aparentă și să producă viteza cerută, v , a pistonului, adică: $Q = Q_a + vA$

Pe de altă parte, debitul este:

$$Q = v_0 A = 0,002 \cdot 78,54 \cdot 10^{-4} = 15,708 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3/\text{s}$$

Rezultă:

$$v = \frac{Q - Q_a}{A} = \frac{(15,708 - 13,753) \cdot 10^{-6}}{78,54 \cdot 10^{-4}} = 0,025 \cdot 10^{-2} \text{ m/s}$$

Așadar, viteza pistonului scade foarte mult în timpul creșterii rezistenței F , învinsă de piston, deoarece cea mai parte a debitului dat de pompă servește pentru acoperirea variației Δv a volumului.

- 13.4.** În poziția deschis a sertarului distribuitorului din figura 13.4, pistonul servomotorului, încărcat cu o sarcină având masa totală $M=800$ kg, coboară cu viteza $v=0,4$ m/s. În momentul în care volumul de ulei din cilindru și din conductă până la sertar este $v_0=1000$ cm³, sertarul este comandat brusc în poziția închis. Cunoscând modulul de elasticitate al uleiului $\varepsilon=14$ MPa, masa lichidului din cilindru $m=0,63$ kg, masa lichidului din conductă până la sertar $m'=0,27$ kg și raportul dintre secțiunea servomotorului și cea a conductei $A/A'=20$, să se determine suprapresiunea uleiului produsă de închiderea sertarului.

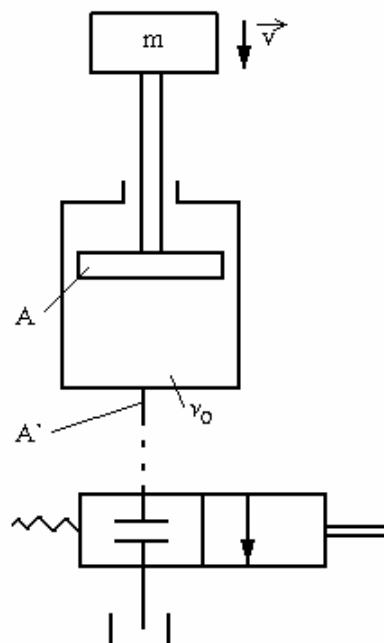


Figura 13.4.

Soluție

Odată cu pistonul, se mișcă cu viteza v și lichidul din cilindru în conducta de descărcare, de arie $A' < A$, viteza fiind $v' = A \cdot v / A'$. Prin închiderea bruscă a sertarului este necesar ca masa M a pistonului și

sarcinii pe de o parte și cea a lichidului până la sertar, pe de altă parte să fie frânate până la repaus. Decelerația ar fi infinită dacă lichidul ar fi incompresibil, ceea ce ar da naștere la o creștere infinită a presiunii. Datorită compresibilității uleiului și elasticității pereților metalici, ia naștere o suprapresiune finită Δp , care se determină din egalarea energiei cinetice totale, corespunzătoare poziției deschis a sertarului, cu suma dintre lucrul mecanic de comprimare a uleiului și lucrul mecanic de deformare a pereților metalici.

Energia cinetică este:

$$E_c = \frac{M \cdot v^2}{2} + \frac{m \cdot v^2}{2} + \frac{m' v'^2}{2} = \frac{v^2}{2} \left[M + m + m' \left(\frac{A}{A'} \right)^2 \right] = \frac{0,4^2}{2} (800 + 0,63 + 0,27 \cdot 20^2) = 72,69 \text{ J}$$

Lucrul mecanic necesar creșterii Δp a presiunii uleiului se determină observând că pistonul și sarcina care-l apasă comprimă perna de ulei ca pe un resort. Energia înmagazinată de resort este $cf^2/2$, unde constanta elastică este:

$$c = \frac{\Delta F}{\Delta l} = \frac{\Delta p \cdot A}{\Delta v / A} = \frac{\Delta p \cdot A^2}{\Delta v} = \frac{\Delta p \cdot A^2}{v_0 \frac{\Delta p}{\varepsilon}} = \frac{\varepsilon \cdot A^2}{v_0}$$

iar săgeata este: $f = \Delta l = \frac{\Delta v}{A} = \frac{v_0 \Delta p}{\varepsilon \cdot A}$

Prin urmare, lucrul mecanic cheltuit pentru comprimarea uleiului este:

$$L_{comp} = \frac{1}{2} c f^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\varepsilon \cdot A^2}{v_0} \cdot \frac{v_0^2 \Delta p^2}{2 \cdot \varepsilon}$$

Se știe că lucrul mecanic necesar pentru deformarea pereților cilindrului are expresia:

$$L_{def} = \frac{A \cdot D \cdot l \cdot \Delta p^2}{2 \cdot E \cdot \delta}$$

Deoarece modulul de elasticitate E , al pereților cilindrului este mult mai mare decât modulul de elasticitate ε al uleiului, rezultă $L_{comp} \gg L_{def}$, adică, $E_c \sim L_{comp}$. Din această egalitate rezultă creșterea presiunii uleiului

$$\Delta p = \sqrt{\frac{2 \cdot \varepsilon \cdot E_c}{v_0}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 14 \cdot 10^6 \cdot 72,69}{10^{-3}}} = 142,66 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$$

Această suprapresiune mare poate fi diminuată substanțial prin montarea unui acumulator hidropneumatic în circuitul uleiului.

Probleme propuse

13.5. O pompă hidraulică alimentează un cilindru hidraulic ca în montajul fin din figura 13.5. Cunoscând debitul pompei $Q_p=80$ l/min, diametrul pistonului $D=100$ mm, forța statică la tija elementului de execuție $F=12000$ N și cursa maximă a acestuia $x=1$ m, să se determine:

- Care este presiunea în camera activă a cilindrului la cursa utilă a acestuia, dacă $\eta_m=0,9$?
- Care este viteza v de deplasare a tijeii cilindrului și cât timp se efectuează mișcarea?
- Care este valoarea p_0 a presiunii de reglaj a supapei de diguranță dacă distanța între pompă și cilindru este de 10 m, diametrul conductei $d_c=10$ mm, iar lichidul de lucru este ulei mineral cu densitatea $\rho=0,87$ g/cm³ și vâscozitatea cinematică $\nu=34$ cSt?

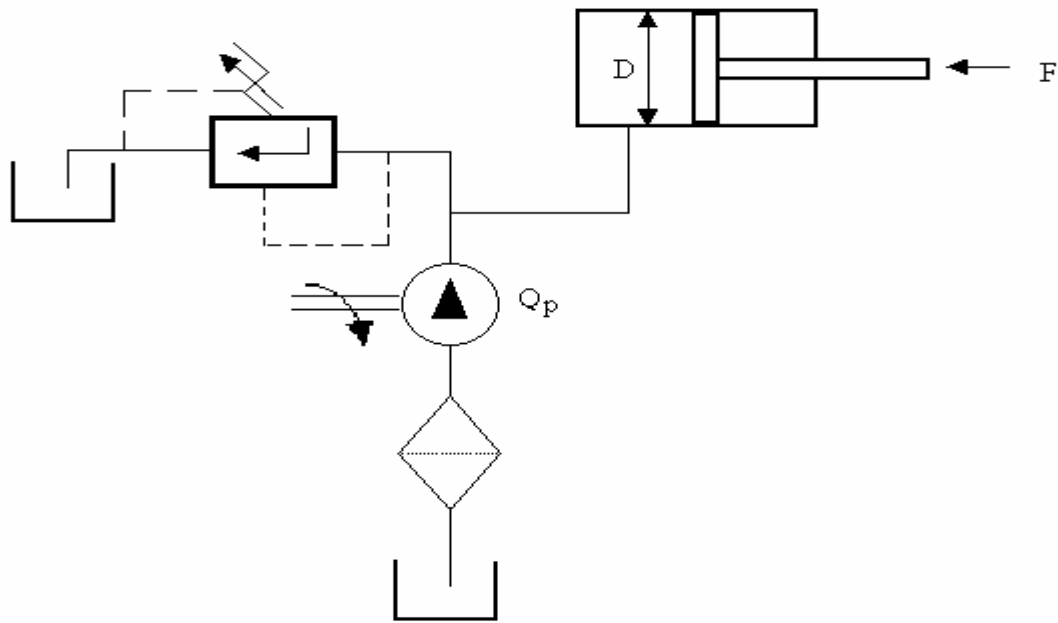


Figura 13.5.

13.6. Se consideră circuitul hidraulic din figura 13.6. La momentul inițial ($t=0$), distribuitorul D 4/3 este comandat de poziția din stânga. Să se determine valoarea $p_{0 \text{ min}}$ a presiunii de reglaj a supapei de siguranță pentru a se obține viteza maximă într-un timp t_0 . Randamentul cilindrului hidraulic este η și accelerația a .

Aplicație numerică: $F=20 \cdot 10^3$ daN; $M=20 \cdot 10^3$ kg; $p_2=2$ bar; $\eta=0,9$; $v_{\text{max}}=0,2$ m/s; $t_0=0,1$ sec; $D=160$ mm; $d=100$ mm.

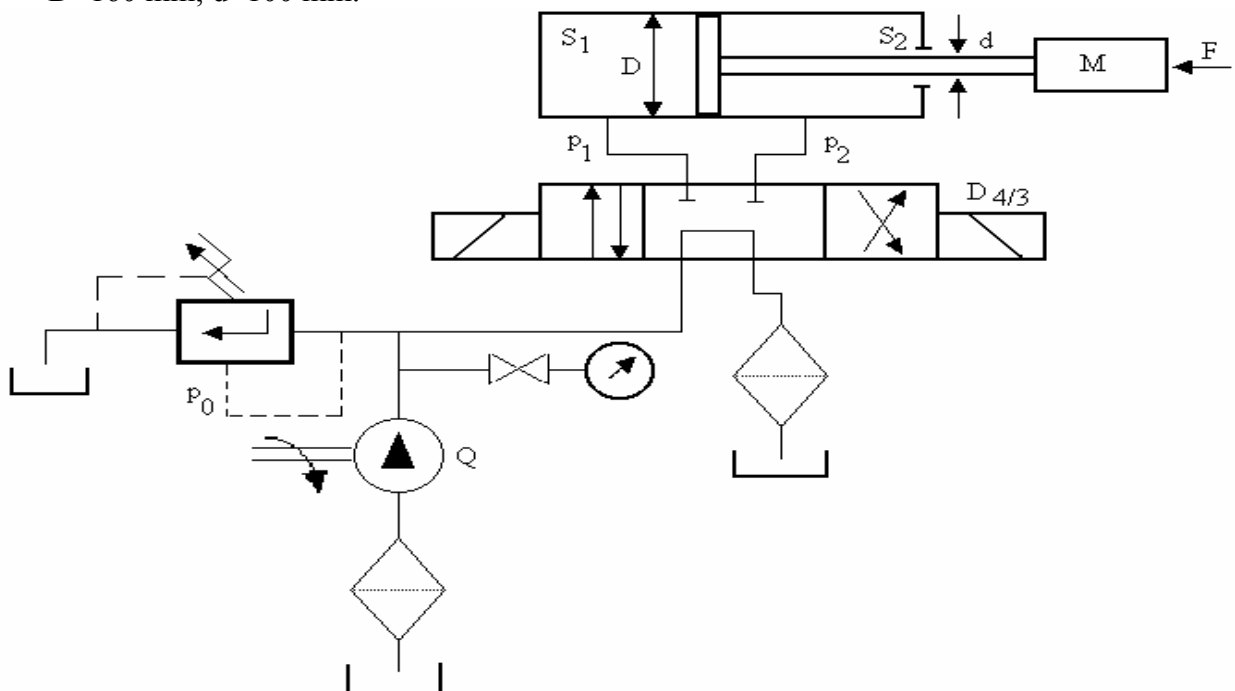


Figura 13.6.

13.7. Se consideră circuitul din figura 13.7. Să se determine puterea motorului electric de antrenare a pompei pentru a asigura cursa maximă de avans a cilindrilor C_1 și C_2 dacă $Q_p=60$ l/min;

$\eta_{t \text{ pompă}}=0,82$; $D_1=100 \text{ mm}$; $d_1=63 \text{ mm}$; $D_2=80 \text{ mm}$; $d_2=50 \text{ mm}$; $F_1=1245 \text{ daN}$; $F_2=3000 \text{ daN}$. Se neglijează pierderile de presiune din circuit.

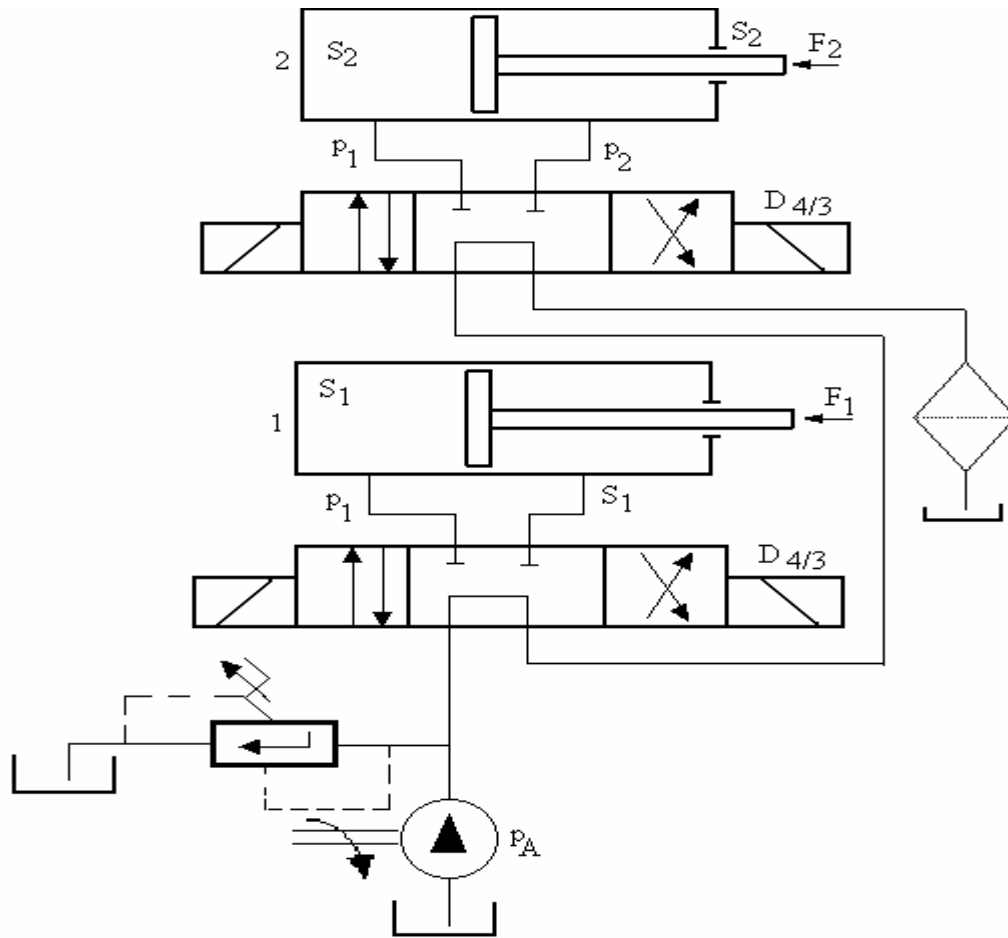


Figura 13.7.

BIBLIOGRAFIE

1. Ancușa, V. – Mecanica fluidelor și mașini hidraulice, vol. II, Reprografia Institutului Politehnic „Traian Vuia”, Timișoara, 1980.
2. Anton, V., Popescu, M. – Hidraulică și mașini hidraulice, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1978.
3. Buculei, M. – Curs de mașini termice și hidraulice, Reprografia Universității din Craiova, 1975.
4. Cogălniceanu, A., Iorgulescu, F. – Orientări actuale în hidroenergetică, Editura tehnică, București, 1967.
5. Dinculescu, C., Moțoiu, A., Mișu, A., Stoica, V. – Centrale termoelectrice. Probleme de proiectare, construcție și exploatare, Editura Tehnică, București, 1959;
6. Florea, J., ș.a. – Mecanica fluidelor și acționări hidropneumatice. Probleme, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1982.
7. Ionescu, D., ș.a. – Mecanica fluidelor și mașini hidraulice, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1983.
8. Moțoiu, C. – Centrale termo și hidroelectrice, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1974.
9. Pavel, D., Zarea, S. – Turbine hidraulice și echipamente hidroenergetice, vol. I și II, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1965.
10. Popa, O. – Mecanica fluidelor și măsurări hidraulice, vol.II, Reprografia Institutului Politehnic „Traian Vuia”, Timișoara, 1980.
11. Rouse, H. – Engineering Hydraulics, J. Wiley & Sons, New York, 1950.
12. Sedile, M. – Turbomachines hydrauliques et termiques, vol. I-IV, Masson & Cie, Paris, 1980.
13. Vavra, M. H. – Aero-Thermodynamics and Flow in Turbomachines, J. Wiley & Sons, New York, 1960.
14. Ventrone, G. – Le turbomachine, Cortina, Padova, 1960.
15. Vladimirescu, I. – Mașini hidraulice și stații de pompare, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1982.
16. XXX – Handbook of Applied Hydraulics, McGraw Hill, New York, 1969.
17. XXX – Catalog de pompe, București, Întreprinderea de pompe „Aversa”, 1976.