

## PROGRAMAREA LINIARĂ

1. O centrală termoelectrică (CTE) are două grupuri de 50 MW. Primul grup are un consum specific de 0,4 tcc/MWh, iar cel de-al doilea de 0,5 tcc/MWh.

Pentru 10 ore de funcționare stocul de combustibil este 350 tcc. Știind că în perioada de funcționare ce-l de-al doilea grup nu poate produce 2 h din cauze tehnologice să se determine încărcarea fiecărui grup astfel încât cantitatea de energie produsă să fie maximă.

Notăm:

$x_1$  – încărcarea primului grup, [MW];

$x_2$  – încărcarea celui de-al doilea grup, [MW].

**Forma canonică a problemei de programare liniară** este:

$\max F(x_1, x_2) = 10 \cdot x_1 + 8 \cdot x_2$  - funcția de maximizare

$$\begin{cases} x_1 \leq 50 \\ x_2 \leq 50 \\ 0,4 \cdot 10 \cdot x_1 + 0,5 \cdot 8 \cdot x_2 \leq 350 \end{cases} \quad \text{- sistem de restricții}$$

$$x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0$$

Trecerea de la **forma canonică** la **forma standard** se face prin adăugarea unei variabile suplimentare (de egalizare) pentru fiecare inecuație a sistemului de restricții.

În cazul nostru sistemul are trei inecuații, deci se vor introduce trei variabile de egalizare notate:  $x_3, x_4, x_5$ .

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 50 \\ x_2 + x_4 = 50 \\ 0,4 \cdot 10 \cdot x_1 + 0,5 \cdot 8 \cdot x_2 + x_5 = 350 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0; \quad x_3 \geq 0; \quad x_4 \geq 0; \quad x_5 \geq 0$$

Acest sistem se mai poate scrie:

$$\begin{cases} x_1 + 0 \cdot x_2 + x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 = 50 \\ 0 \cdot x_1 + x_2 + 0 \cdot x_3 + x_4 + 0 \cdot x_5 = 50 \\ 4 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + x_5 = 350 \end{cases}$$

Din sistemul de ecuații se construiește matricea A și b:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad b = \begin{bmatrix} 50 \\ 50 \\ 350 \end{bmatrix}$$

Funcția de maximizare devine:

$$\max F(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = 10 \cdot x_1 + 8 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5$$

Se construiește matricea C:

$$C = [10 \quad 8 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

Se trasează un tabel în care se trec pe coloane mai întâi variabilele de egalizare (în cazul nostru  $x_3, x_4$  și  $x_5$ ) și apoi variabilele care trebuie determinate (cazul nostru  $x_1$  și  $x_2$ ), valorile fiind luate din matricea A.

	Coloana care iese din vectorul de bază			Coloana care intră în vectorul de bază			La numitor se trece vectorul coloană care intră în bază (cazul nostru $x_1$ )
	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_1$	$x_2$	$B^{-1} \cdot b$	$\min \frac{B^{-1} \cdot b}{x_j}$
	1	0	0	1	0	50	$50/1 = 50$
	0	1	0	0	1	50	$50/0 = -$
	0	0	1	4	4	350	$350/4 = 87,5$
$C_j$	0	0	0	10	8		
$Z_j$	-	-	-	0	0		
$Z_j - C_j$	-	-	-	-10	-8		
				<0	<0		

Completarea tabelului:

- coloanele  $x_3, x_4, x_5, x_1, x_2$  se completează cu valorile din matricea A;
- $B^{-1} \cdot b = b$ ;
- linia  $C_j$  se completează cu valorile din matricea C;
- linia  $Z_j$  se completează astfel: sub matricea unitate (coloanele  $x_3, x_4, x_5$ ) se trece „linie” → „-”, iar sub coloanele  $x_1, x_2$  valorile se calculează astfel:

$$C_j \cdot x_1 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 4 = 0$$

$$C_j \cdot x_2 = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 4 = 0$$

- se calculează apoi diferența  $Z_j - C_j$ , rezultând pe coloanele  $x_1$  și  $x_2$  valorile  $-10$  și  $-8$ . Deoarece există diferențe (negative)  $Z_j - C_j < 0$  rezultă că soluția nu este optimă;
- se caută maximul diferențelor negative  $\max |Z_j - C_j|$  astfel:

$$\max |Z_j - C_j| = \max |-10, -8| = \max (10, 8) = 10$$

Deoarece valoarea 10 se găsește pe coloana  $x_1$  rezultă că vectorul  $x_1$  intră în bază.

- pentru a determina vectorul care iese din bază se pune condiția:

$$\min \left\{ \frac{B^{-1} \cdot b}{x_j} \right\} \Rightarrow \min \left\{ \frac{50}{1}, \frac{50}{0}, \frac{350}{4} \right\} = \min \{50, -, 87,5\} = 50$$

Deoarece valoarea 50 se găsește pe prima linie, se caută pe această linie în vectorul de bază valoarea „1”. În cazul nostru cifra „1” am găsit-o pe coloana  $x_3$ , rezultă că  $x_3$  iese din bază.

- se stabilește pivotul care se găsește la intersecția dintre coloana care intră în vectorul de bază ( $x_1$  în cazul nostru) și linia pe care am găsit minimul  $\min \left\{ \frac{B^{-1} \cdot b}{x_j} \right\} = 50$  (prima linie în cazul nostru).

**Se completează un nou tabel**, astfel:

- $x_1$  și  $x_3$  își schimbă pozițiile între ele **dar nu și valorile**;

- în vectorul de bază (sub  $x_1, x_4, x_5$ ) se completează matricea unitate  $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ;

	$x_1$	$x_4$	$x_5$	$x_3^{pl}$	$x_2^{pl}$	$B^{-1} \cdot b^{pl}$	$\min \frac{B^{-1} \cdot b^{pl}}{x_2}$
	1	0	0	1	0	50	$50/0 = -$
	0	1	0	0	1	50	$50/1 = 50$
	0	0	1	-4	4	150	$150/4 = 37,5$
$C_j$	10	0	0	0	8		
$Z_j$	-	-	-	10	0		
$Z_j - C_j$	-	-	-	+10	-8		
				>0	<0		

➤ coloanele  $x_3^{pl}$ ,  $x_2^{pl}$  și  $B^{-1} \cdot b^{pl}$  se recalculează cu regula pivotului;

$x_3$	$x_1$	$x_3^{pl}$
$a = 1$	$d = 1$	$a/d = 1/1 = 1$ – pe linia cu pivotul elementul se împarte la pivot
$b = 0$	$e = 0$	$b - \frac{e \cdot a}{d} = 0 - \frac{0 \cdot 1}{1} = 0$
$c = 0$	$f = 4$	$c - \frac{f \cdot a}{d} = 0 - \frac{4 \cdot 1}{1} = -4$

$x_2$	$x_1$	$x_2^{pl}$
0	1	$0/1 = 0$
1	0	$1 - \frac{0 \cdot 0}{1} = 1$
4	4	$4 - \frac{4 \cdot 0}{1} = 4$

$B^{-1} \cdot b$	$x_1$	$B^{-1} \cdot b^{pl}$
50	1	$50/1 = 50$
50	0	$50 - \frac{0 \cdot 50}{1} = 50$
350	4	$350 - \frac{4 \cdot 50}{1} = 150$

- linia  $C_j$  se completează din matricea C, ținând cont de valorile lui  $x_1 \div x_5$ ;
- linia  $Z_j$  se completează astfel: sub matricea unitate (coloanele  $x_1, x_4, x_5$ ) se trece „linie” → „-”, iar sub coloanele  $x_3^{pl}, x_2^{pl}$  valorile se calculează astfel:

$$C_j \cdot x_3^{pl} = 10 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot (-4) = 10$$

$$C_j \cdot x_2^{pl} = 10 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 4 = 0$$

- se calculează apoi diferența  $Z_j - C_j$ , rezultând pe coloanele  $x_3^{pl}$  și  $x_2^{pl}$  valorile +10 și -8. Deoarece există o diferență (negativă)  $Z_j - C_j < 0$  rezultă că soluția nu este optimă;

- se caută maximul diferențelor negative  $\max|Z_j - C_j|$  astfel:

$$\max|Z_j - C_j| = \max|-8| = \max(8) = 8$$

Deoarece valoarea 8 se găsește pe coloana  $x_2^{p1}$  rezultă că vectorul  $x_2^{p1}$  intră în bază.

- pentru a determina vectorul care iese din bază se pune condiția:

$$\min\left\{\frac{B^{-1} \cdot b^{p1}}{x_2^{p1}}\right\} \Rightarrow \min\left\{\frac{50}{0}, \frac{50}{1}, \frac{150}{4}\right\} = \min\{-, 50, 37,5\} = 37,5$$

Deoarece valoarea 37,5 se găsește pe a treia linie, se caută pe această linie în vectorul de bază valoarea „1”. În cazul nostru cifra „1” am găsit-o pe coloana  $x_5$ , rezultă că  $x_5$  iese din bază.

- se stabilește pivotul care se găsește la intersecția dintre coloana care intră în vectorul de bază ( $x_2^{p1}$  în cazul nostru la acest pas) și linia pe care am găsit minimumul

$$\min\left\{\frac{B^{-1} \cdot b^{p1}}{x_2^{p1}}\right\} = 37,5 \text{ (a treia linie în cazul nostru la acest pas).}$$

**Se completează un nou tabel, astfel:**

- $x_5$  și  $x_2$  își schimbă pozițiile între ele **dar nu și valorile;**

- în vectorul de bază (sub  $x_1, x_4, x_2^{p1}$ ) se completează matricea unitate  $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ;

	$x_1$	$x_4$	$x_2^{p1}$	$x_3^{p2}$	$x_5^{p2}$	$B^{-1} \cdot b^{p2}$
	1	0	0	1	0	50
	0	1	0	1	-0,25	12,5
	0	0	1	-1	0,25	37,5
$C_j$	10	0	8	0	0	
$Z_j$	-	-	-	2	2	
$Z_j - C_j$	-	-	-	+2	+2	
				>0	>0	

- coloanele  $x_3^{p2}, x_2^{p2}$  și  $B^{-1} \cdot b^{p2}$  se recalculează cu regula pivotului;

$x_3^{p1}$	$x_2^{p1}$	$x_3^{p2}$
1	0	$1 - \frac{0 \cdot (-4)}{4} = 1$
0	1	$0 - \frac{1 \cdot (-4)}{4} = 1$
-4	4	$-4 / 4 = 1$

$x_5$	$x_2^{p1}$	$x_5^{p2}$
0	0	$0 - \frac{0 \cdot 1}{4} = 0$
0	1	$0 - \frac{1 \cdot 1}{4} = -0,25$
1	4	$1 / 4 = 0,25$

$B^{-1} \cdot b^{p1}$	$x_2^{p1}$	$B^{-1} \cdot b^{p2}$
50	0	$50 - \frac{150 \cdot 0}{4} = 50$
50	1	$50 - \frac{1 \cdot 150}{4} = 12,5$
150	4	$150 / 4 = 37,5$

- linia  $C_j$  se completează din matricea  $C$ , ținând cont de valorile lui  $x_1 \div x_5$ ;
- linia  $Z_j$  se completează astfel: sub matricea unitate (coloanele  $x_1, x_4, x_2^{p1}$ ) se trece „linie” → „-”, iar sub coloanele  $x_3^{p2}, x_5^{p2}$  valorile se calculează astfel:

$$C_j \cdot x_3^{p2} = 10 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 8 \cdot (-1) = 2$$

$$C_j \cdot x_5^{p2} = 10 \cdot 0 + 0 \cdot (-0,25) + 8 \cdot 0,25 = 2$$

- se calculează apoi diferența  $Z_j - C_j$ , rezultând pe coloanele  $x_3^{p2}$  și  $x_5^{p2}$  valorile +2 și +2. Deoarece nu există o diferență (negativă)  $Z_j - C_j > 0$  rezultă că s-a atins soluția optimă;

Stabilirea soluției optime:

	$x_1$	$x_4$	$x_2^{p1}$	$x_3^{p2}$	$x_5^{p2}$	$B^{-1} \cdot b^{p2}$	
	1	0	0	1	0	50	
	0	1	0	1	-0,25	12,5	
	0	0	1	-1	0,25	37,5	
$C_j$	10	0	8	0	0		
$Z_j$	-	-	-	2	2		
$Z_j - C_j$	-	-	-	+2	+2		
				>0	>0		

vector de bază

$$x_1 = 50$$

$$x_4 = 12,5$$

$$x_2 = 37,5$$

$$x_3 = 0$$

$$x_5 = 0$$