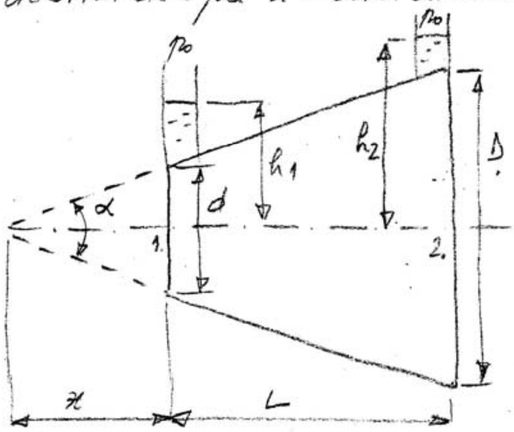
MF

SEMINAR 5+6

APLICAȚII LA DINAMICA FLUIDULUI IDEAL

(1) O conductă tronconică, cu diametrul secțiunii inițiale $d = 25\,mm$, lungimea $L = 0,1\,m$ și unghiul conului $\alpha = 5^\circ$, transportă debitul de apă $Q = 2\,l/s$. Cunoscând înălțimea coloanei de apă din tubul piezometric conectat la secțiunea inițială $h_1 = 100\,mm$, să se determine înălțimea coloanei de apă din tubul piezometric plasat în secțiunea finală a conductei, h_2. Se neglijează pierderile de sarcină.



Rezolvare

$$\cancel{z_1} + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = \cancel{z_2} + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g}$$

$z_1 = z_2$ (conducta este orizontală)

$$\frac{p_0 + \gamma h_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{p_0 + \gamma h_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} \quad ; \quad \cancel{\frac{p_0}{\gamma}} + \frac{\cancel{\gamma} h_1}{\cancel{\gamma}} + \frac{v_1^2}{2g} = \cancel{\frac{p_0}{\gamma}} + \frac{\cancel{\gamma} h_2}{\cancel{\gamma}} + \frac{v_2^2}{2g}$$

$$h_1 + \frac{v_1^2}{2g} = h_2 + \frac{v_2^2}{2g}$$

$$h_2 = h_1 + \frac{v_1^2 - v_2^2}{2g} = 0,1 + \frac{4,07^2 - 2,07^2}{2 \cdot 9,81} = 0,72\,m$$

$$Q = v_1 \cdot \frac{\pi d^2}{4} = v_2 \cdot \frac{\pi D^2}{4}$$

$$v_1 = \frac{4Q}{\pi d^2} = \frac{4 \cdot 2 \cdot 10^{-3}}{\pi \cdot (25 \cdot 10^{-3})^2} = \frac{4 \cdot 2 \cdot 10^{-3}}{\pi \cdot 625 \cdot 10^{-6}} = \frac{8}{\pi \cdot 0,625} = 4,07\,m/s$$

$$v_2 = \frac{4Q}{\pi D^2} = \frac{4 \cdot 2 \cdot 10^{-3}}{\pi \cdot 35^2 \cdot 10^{-6}} = \frac{8}{\pi \cdot 1,225} = 2,07\,m/s$$

$$tg\frac{\alpha}{2} = \frac{d}{2x} = \frac{D}{2(L+x)}$$

$$tg\frac{\alpha}{2} \approx \frac{\alpha}{2}$$

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{d}{2x} = \frac{D}{2(L+x)} \quad \Big| \times 2$$

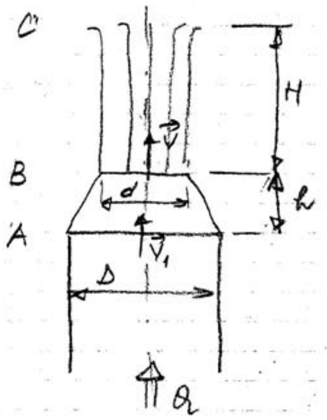
$$\alpha = \frac{d}{x} = \frac{D}{L+x} \; ; \; 0,087 = \frac{0,025}{x} = \frac{D}{0,1+x}$$

180° --- π rad
5° --- ? rad. $\quad \alpha = \frac{5 \cdot \pi}{180} = 0,087\,rad.$

$$x = \frac{0,025}{0,087} = 0,31\,m$$

$$D = 0,087\,(0,1 + 0,31) = 0,035\,m$$

② Să se determine debitul Q şi presiunea p în secţiunea A, necesare pentru ca apa care iese din ajutajul conic din figură, să atingă înălţimea $H = 7{,}4\,m$. Se cunosc $d = 8\,mm$, $D = 40\,mm$ şi $h = 0{,}5\,m$



Rezolvare

$$\boxed{Q} = v \cdot \frac{\pi d^2}{4} = 12{,}04 \cdot \frac{\pi \cdot 0{,}008^2}{4} = 6{,}05 \cdot 10^{-4}\, m^3/s$$

$$\frac{v_B^2}{2g} + \frac{p_B}{\gamma} = \cancel{\frac{v_C^2}{2g}} + \frac{p_C}{\gamma}$$

$$v_B = v;\ v_C = 0;\ p_B = p_0;\ p_C = p_0 + \gamma H$$

$$\frac{v^2}{2g} = \frac{p_0 + \gamma H - p_0}{\gamma} \qquad \frac{v^2}{2g} = H$$

$$v = \sqrt{2gH} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 7{,}4} = 12{,}04\, m/s$$

$$\frac{v_A^2}{2g} + \frac{p_A}{\gamma} = \frac{v_B^2}{2g} + \frac{p_B}{\gamma}$$

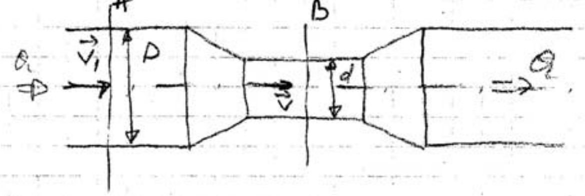
$$v_A = v_1;\ v_B = v;\ p_B = p_0 + \gamma h$$

$$\boxed{p_A} = \gamma \cdot \left(\frac{v^2 - v_1^2}{2g} + \frac{p_0 + \gamma h}{\gamma} \right) = \gamma\, \frac{v^2 - v_1^2}{2g} + p_0 + \gamma h =$$

$$= \overset{\overset{500}{\cancel{1000}}}{\cancel{9810}} \cdot \frac{12{,}04^2 - 0{,}48^2}{\cancel{2 \cdot 9{,}81}} + 101325 + 9810 \cdot 0{,}5 = 178\,595{,}6\, N/m^2$$

$$v_1 = \frac{4Q}{\pi D^2} = \frac{4 \cdot 6{,}05 \cdot 10^{-4}}{\pi \cdot 0{,}04^2} = \frac{4 \cdot 6{,}05 \cdot \cancel{10^{-4}}}{\pi \cdot 16 \cdot \cancel{10^{-4}}} = 0{,}48\, m/s$$

③ La ce presiune p_1, în conducta orizontală de diametru $D = 150\,mm$ din figură, prin care curge debitul $Q = 20\,l/s$, de lichid cu densitatea $\rho = 900\,kg/m^3$; apare pericolul de cavitaţie în zona îngustată de diametru $d = 30\,mm$, dacă presiunea de vaporizare este $\frac{p_v}{\gamma} = 0{,}3\,m$. Se neglijează pierderile de sarcină.



$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g}$$

$z_1 = z$ (conductă orizontală)

$$\frac{p}{\gamma} = \frac{p_v}{\gamma}$$

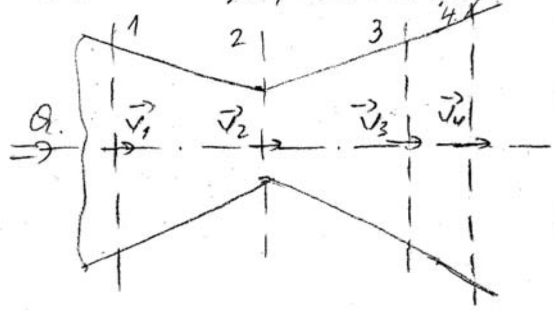
$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{p_{2v}}{\gamma} + \frac{v^2}{2g}$$

$$p_1 = \gamma\left(\frac{p_{2v}}{\gamma} + \frac{v^2 - v_1^2}{2g}\right) = 900 \cdot 9{,}81\left(0{,}3 + \frac{28{,}29^2 - 1{,}13^2}{2 \cdot 9{,}81}\right) = 362\,218{,}4 \frac{N}{m^2}$$

$$v = \frac{4Q}{\pi d^2} = \frac{4 \cdot 20 \cdot 10^{-3}}{\pi \cdot 0{,}03^2} = \frac{0{,}08}{\pi \cdot 0{,}03^2} = 28{,}29 \, m/s$$

$$v_1 = \frac{4Q}{\pi D^2} = \frac{4 \cdot 20 \cdot 10^{-3}}{\pi \cdot 0{,}15^2} = \frac{0{,}08}{\pi \cdot 0{,}15^2} = 1{,}13 \, m/s$$

(4) Într-un tub orizontal, de secțiune variabilă, curge un lichid ideal având greutatea specifică $\gamma = 0{,}98 \, \gamma_{H_2O}$ și debitul $Q = 20 \, l/s$. Care sunt înălțimile piezometrice p_1/γ, p_2/γ, p_3/γ, p_4/γ, dacă se cunosc diametrele secțiunilor respective $d_1 = d_3 = 115 \, mm$, $d_2 = 88 \, mm$, $d_4 = 125 \, mm$ și presiunea $p_1 = 3 \, at$?



Rezolvare

$$v_1 = v_3 = \frac{4Q}{\pi d_1^2} = \frac{4 \cdot 20 \cdot 10^{-3}}{\pi \cdot 0{,}115^2} = \frac{0{,}08}{\pi \cdot 0{,}115^2} = 1{,}925 \, m/s$$

$$v_2 = \frac{4Q}{\pi d_2^2} = \frac{4 \cdot 20 \cdot 10^{-3}}{\pi \cdot 0{,}088^2} = \frac{0{,}08}{\pi \cdot 0{,}088^2} = 3{,}28 \frac{m}{s}$$

$$v_4 = \frac{4Q}{\pi d_4^2} = \frac{4 \cdot 20 \cdot 10^{-3}}{\pi \cdot 0{,}125^2} = \frac{0{,}08}{\pi \cdot 0{,}125^2} = 1{,}63 \frac{m}{s}$$

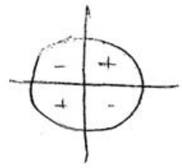
$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} = \frac{p_3}{\gamma} + \frac{v_3^2}{2g} = \frac{p_4}{\gamma} + \frac{v_4^2}{2g}$$

$$H_1 = \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{3 \cdot 9{,}81 \cdot 10^4}{0{,}98 \cdot 9810} + \frac{1{,}925^2}{2 \cdot 9{,}81} = \frac{30}{0{,}98} + \frac{1{,}925^2}{2 \cdot 9{,}81} = 30{,}61 + 0{,}188 \approx 30{,}8 \, m$$

$$\frac{p_2}{\gamma} = H_1 - \frac{v_2^2}{2g} = 30{,}8 - \frac{3{,}28^2}{2 \cdot 9{,}81} = 30{,}8 - 0{,}548 = 30{,}25 \, m$$

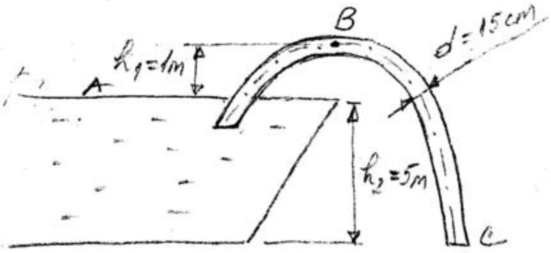
$$\frac{p_3}{\gamma} = H_1$$

$$\frac{p_4}{\gamma} = H_1 - \frac{v_4^2}{2g} = 30{,}8 - \frac{1{,}63^2}{2 \cdot 9{,}81} = 30{,}8 - 0{,}135 = 30{,}66 \, m$$



$\sin(180-\alpha) = -\sin\alpha$

(5) Să se determine debitul de curgere prin sifonul din figură și presiunea în punctul B, în ipoteza neglijării pierderilor de sarcină.



Rezolvare

Pentru determinarea vitezei de curgere prin sifon, se scrie ecuația lui Bernoulli între un punct A, de pe suprafața liberă a lichidului din rezervor și un punct al secțiunii de ieșire din rezervor:

$$\frac{v_A^2}{2g} + \frac{p_A}{\gamma} + z_A = \frac{v_C^2}{2g} + \frac{p_C}{\gamma} + z_C$$

unde: $v_A \cong 0$ (rezervorul are dimensiuni mari în comparație cu diametrul sifonului și viteza de coborâre a suprafeței libere este neglijabilă)

$p_A = p_C = p_a$ (presiunea atmosferică)

$z_A = h_2$, $z_C = 0$ } se alege ca nivel de referință, fundul rezervorului

$$\Rightarrow \cancel{\frac{p_a}{\gamma}} + h_2 = \frac{v^2}{2g} + \cancel{\frac{p_a}{\gamma}}$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{2gh_2} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 5} = 9{,}9\ m/s$$

Debitul de curgere prin sifon este:

$$Q = \frac{\pi d^2}{4} \cdot v = \frac{\pi \cdot 0{,}15^2}{4} \cdot 9{,}9 = 0{,}175\ m^3/s$$

Din ecuatia de continuitate:

$$Q = \frac{\pi D^2}{4} \cdot V_1 = \frac{\pi d^2}{4} \cdot V_3 \implies V_1 = V_3 \frac{d^2}{D^2}$$

Înlocuind în relatia lui Bernoulli

$$\implies \frac{V_3^2 \frac{d^4}{D^4}}{2g} + H + h = \frac{V_3^2}{2g}$$

$$\frac{V_3^2}{2g}\left(1 - \frac{d^4}{D^4}\right) = H + h$$

$$V_3 = \sqrt{\frac{2g(H+h)}{1 - \frac{d^4}{D^4}}} \approx \sqrt{2g(H+h)}$$

$$\frac{d^4}{D^4} = \frac{(5 \cdot 10^{-2})^4}{(5 \cdot 10^{-1})^4} = 10^{-4} \implies 1 - 0{,}0001 \text{ neglijabil}$$

Se observa ca viteza V_3 are valoare maxima pentru înaltimea H_{max} a tubului. Pentru determinarea acesteia se aplica relatia lui Bernoulli între punctele 2 si 3:

$$\cancel{\frac{V_2^2}{2g}} + \frac{p_2}{\rho} + H = \cancel{\frac{V_3^2}{2g}} + \frac{p_a}{\rho}$$

Din conditia de continuitate

$$V_2 \frac{\pi d^2}{4} = V_3 \frac{\pi d^2}{4} \implies V_2 = V_3$$

$$\implies H = \frac{p_a - p_2}{\rho}$$

Valoarea maxima a lui H se obtine în cazul în care $\frac{p_2}{\rho} = \frac{p_v}{\rho}$, adica

$$H_{max} = \frac{p_a - p_v}{\rho} = 10 - 0{,}24 = 9{,}76\,m$$

$$\implies V_{3max} = \sqrt{2g(H_{max} + l)} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81(9{,}76 + 1)} = 14{,}53\ m/s$$

Pentru determinarea presiunii în punctul B, se scrie relația lui Bernoulli între acest punct și ieșirea sifonului:

$$\frac{v_B^2}{2g} + \frac{p_B}{\gamma} + z_B = \frac{v_C^2}{2g} + \frac{p_C}{\gamma} + z_C$$

unde: $v_B = v_C = v = 9,9\ m/s$

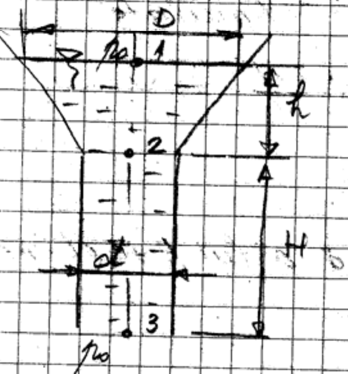
$z_B = h_1 + h_2$; $z_C = 0$

$p_C = p_a$

$$\Rightarrow \cancel{\frac{v^2}{2g}} + \frac{p_B}{\gamma} + h_1 + h_2 = \cancel{\frac{v^2}{2g}} + \frac{p_a}{\gamma}$$

$$\Rightarrow p_B = p_a - \gamma(h_1 + h_2) = 101325 - 9810(1+5) = = 42465\ N/m^2$$

⑥ Să se stabilească viteza maximă pe care o are apa la ieșirea prin secțiunea 3 a tubului din figură, determinându-se în prealabil înălțimea H a acestuia, astfel încât în secțiunea 2 presiunea să nu scadă sub presiunea de vaporizare a apei. Se cunosc diametrele $D = 0,5m$, $d = 0,05m$, presiunea de vaporizare a apei la 20°C, $\frac{p_v}{\gamma} = 0,24 m H_2O$, presiunea atmosferică $\frac{p_a}{\gamma} = 10 m H_2O$ și înălțimea rezervorului $h = 1m$.



Rezolvare

Se scrie relația lui Bernoulli între punctele 1 și 3:

$$\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_a}{\gamma} + H + h = \frac{v_3^2}{2g} + \frac{p_a}{\gamma}$$