PROBLEME SEMINAR

TEHNICI DE OPTIMIZARE ÎN ENERGETICĂ

PROBLEMA 1

Să se determine încărcarea optimă a două grupuri ale unei centrale termoelectrice cu puterile nominale de 100 şi 200 MW. Cele două grupuri utilizează cărbunele – combustibil de bază şi păcură – combustibil suport. Consumurile specifice sunt de 0,4 tcc/MWh (din care 5% combustibil suport) pentru primul grup şi 0,3 tcc/MWh (din care 8% combustibil suport) pentru cel de al doilea grup. Cantităţile de combustibil disponibile pentru o zi de funcţionare sunt de 2200 tcc echivalent cărbune şi 150 tcc echivalent păcură. Criteriul de optimizare cere să se producă o cantitate cât mai mare de energie cu combustibilul disponibil.

Rezolvare

Se notează cu x_1 puterea produsă de primul grup şi cu x_2 puterea produsă de cel de al doilea grup.

Formularea matematică a aceste probleme este următoarea:

$$\max(24x_1 + 24x_2)$$
$$\begin{cases} 0{,}95 \cdot 24 \cdot 0{,}4x_1 + 0{,}92 \cdot 24 \cdot 0{,}3x_2 \le 2200 \\ 0{,}05 \cdot 24 \cdot 0{,}4x_1 + 0{,}08 \cdot 24 \cdot 0{,}3x_2 \le 150 \\ x_1 \le 100 \\ x_2 \le 200 \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0; \quad x_2 \ge 0$$

După cum se poate observa este vorba de o problemă de optimizare sub formă canonică. Pentru a o transforma sub formă standard se introduc variabilele ecart suplimentare x_3, x_4, x_5, x_6 care transformă inegalităţile în egalităţi, problema modificată fiind:

$$\max\left(24\cdot x_1+24\cdot x_2+0\cdot x_3+0\cdot x_4+0\cdot x_5+0\cdot x_5\right)$$
$$\begin{cases}9{,}12x_1+6{,}624x_2+x_3=2200\\0{,}48x_1+0{,}576x_2+x_4=150\\x_1+x_5=100\\x_2+x_6=200\end{cases}$$
$$x_1\geq 0;\quad x_2\geq 0;\quad x_3\geq 0;\quad x_4\geq 0;\quad x_5\geq 0;\quad x_6\geq 0$$

Elementele care permit punerea acestei probleme sub formă standard matriceală sunt:

$$c=\begin{bmatrix}24 & 24 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}^T$$
$$A=\begin{bmatrix}9{,}12 & 6{,}624 & 1 & 0 & 0 & 0\\0{,}48 & 0{,}576 & 0 & 1 & 0 & 0\\1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$
$$b=\begin{bmatrix}2200 & 150 & 100 & 200\end{bmatrix}^T$$

O împărţire foarte simplă a matricei A care permite obţinerea soluţiei iniţiale de bază şi iniţializarea algoritmului este:

$$B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=I;\quad R=G=\begin{bmatrix}9{,}12 & 6{,}624\\0{,}48 & 0{,}576\\1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$$
$$c^B=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}^T;\quad c^R=\begin{bmatrix}24 & 24\end{bmatrix}^T$$

care corespunde soluţiei iniţiale:

$$x_1^{(0)} = 0; x_2^{(0)} = 0; x_3^{(0)} = 2200; x_4^{(0)} = 150; x_5^{(0)} = 100; x_5^{(0)} = 200$$

cu o valoare nulă a funcţiei obiectiv.

În continuare se completează tabelul simplex. Pentru aceasta se porneşte de la soluţia iniţială de bază pentru care se determină valorile coeficienţilor Z_j făcând produsul scalar dintre coloana c şi coloana a_j.

De exemplu:

$$Z_1 = c^T a_1 = 0 \cdot 9{,}12 + 0 \cdot 0{,}48 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 0$$

Aceşti coeficienţi se utilizează pentru determinarea diferenţelor Z_j-c_j pentru coloanele a_j care nu fac parte din bază.

Deoarece ambele diferenţe care interesează la acest caz (Z_1-c_1 şi Z_2-c_2) sunt negative, rezultă că soluţia nu este optimă. Din faptul că atât vectorul a_1 cât şi vectorul a_2 are componente pozitive, rezultă că nu se poate trage concluzia că nu există soluţie optimală.

Diferenţele Z_j-c_j negative fiind, în acest caz, egale, se alege arbitrar a_1 ca fiind noul vector care intră în bază.

Pentru determinarea vectorului care iese din bază se calculează:

$$\min_{k=m+1,n} \left\{ \frac{\overline{x}_k^B}{g_{kl}} \middle| g_{kl} > 0 \right\} = \min\left\{ \frac{2200}{9{,}12}, \frac{150}{0{,}48}, \frac{100}{1} \right\} = \frac{100}{1}$$

deci vectorul care iese din bază va fi a_5.

Soluţia optimă pentru această problemă este următoarea:

$$x_3 = 115; x_2 = 177{,}08; x_1 = 100; x_3 = 115; x_6 = 22{,}91; x_4 = x_5 = 0$$

După cum se poate observa, pentru a obţine cantitatea maximă de energie grupurile trebuie încărcate cu puterile de 100 MW şi respectiv 177 MW, deci trebuie încărcat cu puterea nominală grupul care are consumul specific maxim, contrar a ceea ce era de aşteptat.

Problema duală corespunzătoare problemei date va fi:

$$\min\left(2200y_1 + 150y_2 + 100y_3 + 200y_4\right)$$
$$\begin{cases} 0{,}95\cdot 24\cdot 0{,}4y_1 + 0{,}05\cdot 24\cdot 0{,}4y_2 + y_3 & \geq 24 \\ 0{,}92\cdot 24\cdot 0{,}3y_1 + 0{,}08\cdot 24\cdot 0{,}3y_2 + \qquad y_4 & \geq 24 \end{cases}$$
$$y_1 \geq 0;\quad y_2 \geq 0;\quad y_3 \geq 0;\quad y_4 \geq 0$$

a cărei soluţie poate fi găsită pe linia ultimului tabel simplex, pe linia Z_j în coloanele $a_3 \div a_6$ care au alcătuit prima bază: $y_1=0$; $y_2=41{,}66$; $y_3=4$; $y_4=0$.

Tabel simplex pasul 1

		24	24	0	0	0	0		
C	Baza	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	b	
0	a_3	9,12	6,624	1	0	0	0	2200	$\min\left\{\frac{2200}{9,12},\frac{150}{0,48},\frac{100}{1}\right\} = \frac{100}{1}$
0	a_4	0,48	0,576	0	1	0	0	150	
0	a_5	$\boxed{1}$	0	0	0	1	0	100	
0	a_6	0	1	0	0	0	1	200	
Z_j		0	0	0	0	0	0	0	
Z_j-c_j		-24	-24	0	0	0	0		

Tabel simplex pasul 2

		24	24	0	0	0	0	
Baza	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	b	
a_3	0	6,624	1	0	-9,12	0	1288	$\min\left\{\frac{1288}{6,624},\frac{102}{0,576},\frac{200}{1}\right\}=\frac{102}{0,576}$
a_4	0	$\boxed{0,576}$	0	1	-0,48	0	102	
a_1	1	0	0	0	1	0	100	
a_6	0	1	0	0	0	1	200	
Z_j		24	0	0	0	24	0	2400
Z_j-c_j		0	-24	0	0	0	0	

Tabel simplex pasul 3

		24	24	0	0	0	0		
C	Baza	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	b	
0	a_3	0	0	1	-11,5	-3,6	0	115	
24	a_2	0	1	0	1,736	-0,833	0	177,08	
24	a_1	1	0	0	0	1	0	100	
0	a_6	0	0	0	-1,736	0,833	0	22,91	
Z_j		24	24	0	41,66	4	0	6649,9	
Z_j-c_j		0	0	0	41,66	4	0		

PROBLEMA 2

Să se analizeze oportunitatea construirii a două centrale şi a unei staţii electrice în două locaţii A şi B. Nu se poate construi o staţie electrică într-o anumită locaţie decât dacă s-a construit şi o centrală în locaţia respectivă. Deoarece există şi alte soluţii de racordare nu este obligatorie construirea unei staţii în cazul construirii unei centrale.

În tabelul următor sunt indicate: beneficiul anual obţinut în urma realizării fiecărei investiţii, costurile de realizare şi capitalul disponibil pentru întregul proiect.

milioane

Nr. crt.	Alternativa	Variabila de decizie	Beneficiu	Costuri
			10^6 [€]	10^6 [€]
1	Construire centrală în A	x_1	90	500
2	Construire centrală în B	x_2	60	300
3	Construire staţie în A	x_3	30	300
4	Construire staţie în B	x_4	40	400
Capital disponibil				1.000

Variabilelor $x_1 \div x_4$ li se impune să fie variabile bivalente (să ia doar valorile 0 sau 1). Valoarea 1 a variabilei x_j corespunde unei decizii de realizare a investiţiei respective iar o valoare nulă corespunde unei decizii de respingere a acesteia.

Pe lângă condiţia ca variabilele să fie bivalente se mai formulează următoarele restricţii:

-condiţia de a nu construi decât cel mult o centrală:

$x_3 + x_4 \leq 1$

-condiţia de a nu construi o staţie într-o locaţie în care nu s-a construit o centrală:

$x_3 \leq x_1$, $x_4 \leq x_2$

Ca funcţie obiectiv se impune maximizarea beneficiului anual.

Rezultă următorul model matematic:

$$\max F(x_1, x_2, x_3, x_4) = 90x_1 + 60x_2 + 30x_3 + 40x_4$$

$$\begin{cases} 500x_1 + 300x_2 + 300x_3 + 400x_4 \leq 1000 \\ x_3 + x_4 \leq 1 \\ -x_1 + x_3 \leq 0 \\ -x_2 + x_4 \leq 0 \end{cases}$$

$$x_j \in \{0,1\} \quad j = \overline{1,4}$$

Soluţia acestei probleme de programare liniară în numere întregi (uşor de determinat prin încercări, ţinând cont că nu sunt decât 7 combinaţii posibile) este: F(1,1,0,0)=150

Dacă se încearcă obţinerea soluţiei prin rotunjirea soluţiei problemei în care se renunţă la condiţia ca variabilele să fie numere întregi, se obţine problema modificată:

$$\max F(x_1, x_2, x_3, x_4) = 90x_1 + 60x_2 + 30x_3 + 40x_4$$

$$\begin{cases} 500x_1 + 300x_2 + 300x_3 + 400x_4 \leq 1000 \\ x_3 + x_4 \leq 1 \\ -x_1 + x_3 \leq 0 \\ -x_2 + x_4 \leq 0 \\ x_1 \leq 1 \\ x_2 \leq 1 \\ x_3 \leq 1 \\ x_4 \leq 1 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \quad j = \overline{1,4}$$

cu soluţia: F(1; 1; 0,2; 0,35)=170

Dacă se rotunjeşte soluţia problemei modificate (1; 1; 0,2; 0,35) la valoarea cea mai apropiată se obţine soluţia problemei în numere întregi.

Obţinerea soluţiei problemei în numere întregi prin rotunjirea soluţiei nu garantează întotdeauna obţinerea soluţiei corecte. De exemplu, se modifică problema iniţială considerând un capital disponibil de 1.150, sub forma:

$$\max F(x_1, x_2, x_3, x_4) = 90x_1 + 60x_2 + 30x_3 + 40x_4$$

$$\begin{cases} 500x_1 + 300x_2 + 300x_3 + 400x_4 \leq 1150 \\ x_3 + x_4 \leq 1 \\ -x_1 + x_3 \leq 0 \\ -x_2 + x_4 \leq 0 \end{cases}$$

$$x_j \in \{0,1\} \quad j = \overline{1,4}$$

Soluţia acestei probleme este F(1,1,1,0)=180

Problema în numere reale are forma

$$\max\ F(x_1, x_2, x_3, x_4) = 90x_1 + 60x_2 + 30x_3 + 40x_4$$

$$\begin{cases} 500x_1 + 300x_2 + 300x_3 + 400x_4 \le 1150 \\ x_3 + x_4 \le 1 \\ -x_1 + x_3 \le 0 \\ -x_2 + x_4 \le 0 \\ x_1 \le 1 \\ x_2 \le 1 \\ x_3 \le 1 \\ x_4 \le 1 \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \quad j = \overline{1,4}$$

cu soluţia F(1; 1; 0,34; 0,619)=185

Prin rotunjire la valoarea cea mai apropiată se obţine (1; 1; 0; 1) care nu numai că nu este soluţia problemei în numere întregi, dar nu este nici soluţie admisibilă pentru problema respectivă.

PROBLEMA 3

Să se rezolve următoarea problemă de programare în numere întregi folosind metoda branch&bound:

$$(P)\begin{cases}(\max)F = 4x_1 + 3x_2 \\ 3x_1 + 4x_2 \le 12 \\ 4x_1 + 2x_2 \le 9 \\ x_1, x_2 \in N\end{cases}$$

START

- Se iniţializează: z_{CMB} = - ∞ şi x_{CMB} = ∅
- Se rezolvă cu algoritmul simplex relaxata problemei (P):

$$(PL)\begin{cases}(\max)\ f = 4\ x_1 + 3\ x_2 \\ 3\ x_1 + 4\ x_2 \le 12 \\ 4\ x_1 + 2\ x_2 \le 9\end{cases}$$
$$x_1,\ x_2 \ge 0$$

şi se găseşte soluţia optimă fracţionară:

$x_1^* = 1,2;\ x_2^* = 2,1;\ f\left(x^*\right) = 11,1$

- Rezultă că optimul întreg nu poate depăşi marginea superioară:

$$z = [11,1] = 11$$

- Variabila după care se face ramificarea va fi aleasă după criteriul „părţii fracţionare mai mari”; în cazul de faţă este vorba de variabila x_1.

Iteraţia 1 Se rezolvă cu algoritmul simplex programul liniar (PL_1) dedus din (PL) prin adăugarea restricţiei $x_1 \leq 1$.

• Se găseşte soluţia fracţionară $x_1 = 1 \quad x_2 = 1{,}25; \quad f = 10{,}75$

• Se conchide că soluţiile admisibile întregi ale problemei (PL_1) care sunt şi soluţii ale problemei iniţiale (P) nu pot oferi funcţiei obiectiv o valoare mai mare decât marginea:

$$z_1 = [10{,}75] = 10$$

• Se ramifică după variabila x_2.

Iteraţia 2 Se rezolvă problema (PL_{11}) obţinută din PL_1 adăugând restricţia $x_2 \leq 2$.

• Rezultă soluţia întreagă $x_1 = 1, \quad x_2 = 2; \quad f = 10$

evident mai bună decât soluţia întreagă „depozitată" în x_{CMB}. În consecinţă se actualizează: $x_{CMB} = (1,2)^T$ $z_{CMB} = 10$

• Se revine la problema PL_1.

Iteraţia 3 Deoarece valoarea funcţiei pentru soluţia întreagă a problemei PL_{11} este egală cu z_1, rezultă că prin rezolvarea problemelor obţinute prin ramificarea problemei PL_{12} rezultată din adăugarea la (PL) a restricţiei $x_2 \geq 3$ nu poate conduce la o valoare mai mare decât cea deja obţinută (f=10, PL_{11}). În aceste condiţii, programul PL_{12} şi cele ce decurg din acesta se rezolvă doar în cazul în care se doreşte să se determine eventualele soluţii echivalente din punct de vedere al valorii funcţiei obiectiv. Rezolvarea programului PL_{12} conduce la soluţia întreagă $x_1 = 0$, $x_2 = 3$, f = 9 care este mai slabă decât cea stocată în x_{CMB}.

- Se revine la problema PL_1 şi apoi la PL.

Iteraţia 4 Se rezolvă cu algoritmul simplex programul liniar (PL_2) dedus din (PL) prin adăugarea restricţiei $x_1 \geq 2$.

- Se găseşte soluţia fracţionară $x_1 = 2$, $x_2 = 0,5$; $f = 9,5$

Programele care pot rezulta prin ramificare din aceasta adăugând condiţiile $x_2=0$ şi, respectiv, $x_2 \geq 1$ vor conduce la valori ale funcţiei obiectiv care nu pot depăşi:

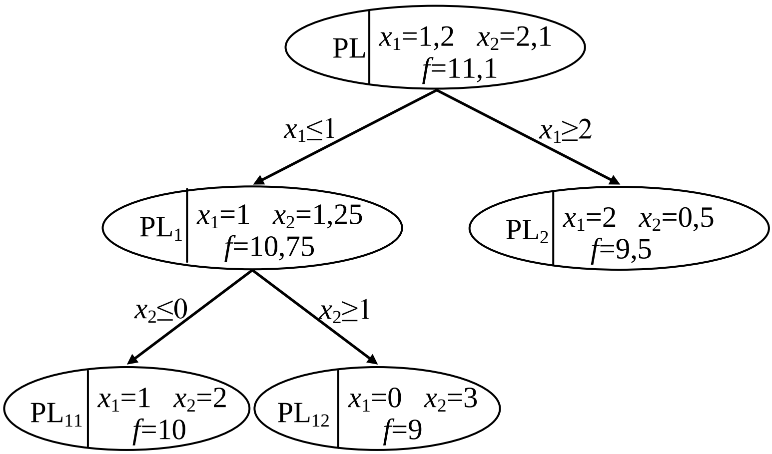
$$z_2 = [9,5] = 9$$

deci care sunt inferioare soluţiei deja determinate. În aceste condiţii acesta este un nod terminal.

Recapitulând, studiul problemei PL_{11} a produs o soluţia întreagă care a fost reţinută precum şi concluzia că PL_{12} şi PL_2 nu are soluţii întregi mai bune decât cea găsită. În acest moment se poate spune că au fost examinate – direct sau indirect - toate soluţiile întregi ale problemei (P). Soluţia întreagă reţinută în x_{CMB} este din cea mai bună soluţie întreagă adică este soluţia optimă a problemei originale (P).

Un nod al arborelui T din care ramificarea poate continua se numeşte *nod activ*; altminteri el se va numi *nod mort*. Din denumire rezultă că algoritmul se opreşte în momentul în care rădăcina PL este declarată nod mort.

Comentariile de mai sus sunt sintetizate în arborele din figura următoare



PROBLEMA 4

Să se determine planul de aprovizionare cu materiale pe durata unui an a unui şantier hidroenergetic. Se notează cu b_1, b_2, b_3 şi b_4 necesarul trimestrial şi se consideră că stocul maxim admisibil este reprezentat de valoare d. Planul optim este acela care minimizează cheltuielile de aprovizionare, exprimate prin valorile specifice c_1, c_2, c_3 şi c_4, care pot fi diferite pentru cele patru trimestre. Cantitatea existentă la începutul primului trimestru are valoarea a care este mai mică decât necesarul primului trimestru. Se admite că aprovizionarea trimestrială se face o singură dată, la începutul trimestrului.

Se vor considera următoarele valori numerice:

$$b_1 = 1000; \quad b_2 = 900; \quad b_3 = 1300; \quad b_4 = 800;$$
$$c_1 = 70; \quad c_2 = 60; \quad c_3 = 50; \quad c_4 = 80;$$
$$a = 500; \quad d = 1500.$$

Dacă se notează cu x_1, x_2, x_3 şi x_4 variabilele ce desemnează cantităţile aprovizionate la începutul fiecăruia din cele patru trimestre, restricţiile ce definesc domeniile X_i sunt reprezentate prin:

$$x_i \in \left[\underline{x}_i, \overline{x}_i\right]$$

$$\underline{x}_1 = b_1 - a;$$
$$\overline{x}_1 = d - a;$$

$$\underline{x}_2 = \max\{0, b_1 + b_2 - a - x_1\};$$
$$\overline{x}_2 = d + b_1 - a - x_1;$$

$$\underline{x}_3 = \max\{0, b_1 + b_2 + b_3 - a - x_1 - x_2\};$$
$$\overline{x}_3 = d + b_1 + b_2 - a - x_1 - x_2;$$

$$\underline{x}_3 = \max\{0, b_1 + b_2 + b_3 + b_4 - a - x_1 - x_2\};$$
$$\overline{x}_3 = d + b_1 + b_2 - a - x_1 - x_2;$$

Starea va fi descrisă de două variabile definite ca:

$$\xi_1^1 = b_1 - a; \quad \xi_1^2 = d - a;$$
$$\xi_{i+1}^1 = \xi_i^1 + b_{i+1} - x_i; \quad \xi_{i+1}^2 = \xi_i^2 + b_i - x_i; \quad i \geq 1$$

Elementele care definesc procesul secvenţial de decizie cu analiză prospectivă sunt:

$$T = \{1,2,3,4\}$$
$$X_i(\xi_i) = X_i(\xi_i^1, \xi_i^2) = [\max\{0, \xi_i^1\}, \xi_i^2];$$
$$\xi_{i+1} = g_i(x_i, \xi_i);$$
$$u_i(x_i, \xi_i) = c_i x_i;$$
$$F(x_1, x_2, x_3, x_4, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) = \sum_{i=1}^{4} u_i(x_i, \xi_i);$$

unde funcţiile de trecere au următoarele expresii:

$$g_3(x_3, \xi_3) = [\xi_3^1 + 800 - x_3; \quad \xi_3^2 + 1300 - x_3]$$
$$g_2(x_2, \xi_2) = [\xi_2^1 + 1300 - x_2; \quad \xi_2^2 + 900 - x_2]$$
$$g_1(x_1, \xi_1) = [\xi_1^1 + 900 - x_1; \quad \xi_1^2 + 1000 - x_1]$$

În continuare se scriu funcţiile de utilitate asociate proceselor secvenţiale parţiale:

$$F_4(x_1,x_2,x_3,x_4,\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4)=\sum_{i=1}^{4}u_i(x_i,\xi_i)$$
$$=\sum_{i=1}^{4}c_i x_i = F(x_1,x_2,x_3,x_4,\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4);$$
$$F_3(x_2,x_3,x_4,\xi_2,\xi_3,\xi_4)=\sum_{i=2}^{4}u_i(x_i,\xi_i)=\sum_{i=2}^{4}c_i x_i;$$
$$F_2(x_3,x_4,\xi_3,\xi_4)=\sum_{i=3}^{4}u_i(x_i,\xi_i)=\sum_{i=3}^{4}c_i x_i;$$
$$F_1(x_4,\xi_4)=u_4(x_4,\xi_4)=c_4 x_4;$$

După cum se constată problema este decompozabilă prospectiv dacă se consideră funcţiile f_i de forma:

$$f_i(u,v)=u+v$$

care îndeplinesc condiţiile din definiţie.

Deoarece se cere determinarea strategiei care conduce la cheltuieli minime se va putea aplica algoritmul prezentat dacă se înlocuieşte peste tot condiţia de maxim prin condiţie de minim.

Pasul 1.

Se caută decizia pentru ultima etapă care conduce la minimizarea costurilor:

$$\min_{x_4 \in X_4(\xi_4)} \left\{ \widetilde{F}_1(x_n, \xi_n) \right\} = \min_{x_4 \in X_4(\xi_4)} \left\{ 40x_4 \right\}$$

unde: $X_4(\xi_4) = [\xi_4^1, \xi_4^2]$

Deoarece funcţia care trebuie minimizată este crescătoare, minimul său va fi atins în punctul $x_4^* = \xi_4^1$ şi se obţine:

$$\widetilde{h}_1(\xi_4) = 80\xi_4^1$$

Pasul 2

Se urmăreşte determinarea deciziei pentru penultima etapă care conduce la minimizarea costurilor pentru ultimele două etape:

$$\min_{x_3 \in X_3(\xi_3)} \left\{ 50x_3 + 80\xi_4^1 \right\}$$

în care ξ_4^1 se obţine din expresia funcţiei g_3:

$$[\xi_4^1, \xi_4^4] = g_3(x_3, \xi_3) = [\xi_3^1 + 800 - x_3; \quad \xi_3^2 + 1300 - x_3]$$

ceea ce conduce la:

$$\min_{x_3 \in X_3(\xi_3)} \left\{ 50x_3 + 80\left(\xi_3^1 + 800 - x_3\right) \right\} = \min_{x_3 \in X_3(\xi_3)} \left\{ 80\xi_3^1 - 30x_3 + 64000 \right\}$$

Minimul va fi atins pentru $x_3^* = \xi_3^2$ (deoarece funcţia este descrescătoare în raport cu x_3) iar valoarea acestui minim va fi:

$$\widetilde{h}_2(\xi_3) = 80\xi_3^1 - 30\xi_3^2 + 64000$$

Pasul 3

Procedând ca şi în cazul anterior rezultă, cu ξ_3^1 şi ξ_3^2 obţinute din expresia lui g_2:

$$\min_{x_2 \in X_2(\xi_2)} \left\{60x_2 + \widetilde{h}_2(\xi_3)\right\} = \min_{x_2 \in X_2(\xi_2)} \left\{60x_2 + 80\xi_3^1 - 30\xi_3^2 + 64000\right\} =$$
$$= \min_{x_2 \in X_2(\xi_2)} \left\{60x_2 + 80\left(\xi_2^1 + 1300 - x_2\right) - 30\left(\xi_2^2 + 900 - x_2\right) + 64000\right\} =$$
$$= \min_{x_2 \in X_2(\xi_2)} \left\{10x_2 + 80\xi_2^1 - 30\xi_2^2 + 141000\right\}$$

şi se obţine valoarea minimă pentru $x_2^* = \xi_2^1$:

$$\widetilde{h}_3(\xi_2) = 90\xi_2^1 - 30\xi_2^2 + 141000$$

Pasul 4

$$\min_{x_1 \in X_1(\xi_1)} \left\{70x_1 + \widetilde{h}_3(\xi_2)\right\} = \min_{x_1 \in X_1(\xi_1)} \left\{70x_2 + 90\xi_2^1 - 30\xi_2^2 + 141000\right\} =$$
$$= \min_{x_1 \in X_1(\xi_1)} \left\{70x_2 + 90\left(\xi_1^1 + 900 - x_1\right) - 30\left(\xi_1^2 + 1000 - x_1\right) + 141000\right\} =$$
$$= \min_{x_1 \in X_1(\xi 1)} \left\{10x_2 + 90\xi_1^1 - 30\xi_1^2 + 1192000\right\}$$

cu minimul atins pentru $x_1^* = \xi_1^1$, minim cu valoarea:

$$\widetilde{h}_4(\xi_1) = 1000\xi_1^1 - 30\xi_1^2 + 1192000$$

Deoarece: $\xi_1 = [500;1000]$

rezultă:

$$x_1^* = 500$$

şi, în continuare:

$$\xi_2 = g_1(x_1^*, \xi_1) = \left[\xi_1^1 + 900 - x_1^*; \quad \xi_1^2 + 1000 - x_1^*\right] = [900;1500]$$

$$x_2^* = \xi_2^1 = 900$$

$$\xi_3 = g_2(x_2^*, \xi_2) = \left[\xi_2^1 + 1300 - x_2^*; \quad \xi_2^2 + 900 - x_2^*\right] = [1300;1500]$$

$$x_3^* = \xi_3^2 = 1500$$

$$\xi_4 = g_3(x_3^*, \xi_3) = \left[\xi_3^1 + 800 - x_3^*; \quad \xi_3^2 + 1300 - x_3^*\right] = [600;1300]$$

$$x_3^* = \xi_3^2 = 1300$$

2. Să se stabilească locul optim de instalare a cinci grupuri termoenergetice în cadrul a patru centrale. Utilitatea instalării grupurilor în fiecare din cele patru centrale (care cuprind toate tipurile de pierderi, inclusiv transportul combustibilului şi pierderile în reţea) este cuprinsă în tabelul următor.

Nr. grupuri	Utilitate			
	$u_1(n)$	$u_2(n)$	$u_3(n)$	$u_4(n)$
0	0	0	0	0
1	38	40	37	41
2	81	84	79	82
3	118	117	119	115
4	152	148	149	150
5	198	191	196	195

În continuare se completează tabelul derivat. Coloana $F1$ reprezintă de fapt prima coloană din tabelul utilităţilor, coloana X_1 este identică cu coloana N. Ca exemplu se arată modul în care se calculează $F_2(3)$. În acest scop se calculează următoarele valori:

$$u_2(0)+F_1(3)=0+118=118$$
$$u_2(1)+F_1(2)=40+81=121$$
$$u_2(2)+F_1(1)=84+38=122$$
$$u_2(3)+F_1(2)=117+0=117$$
$$\max\{118,121,122,117\}=122$$

deci valoarea lui $F_2(3)$ va fi 122 iar argumentul lui u_2 (n=2) în expresia care are valoarea maximă va fi valoarea lui $X_2(3)$.

N	F_1	X_1	F_2	X_2	F_3	X_3	F_4	X_4
0	*0*	*0*	*0*	*1*	*0*	0	0	0
1	38	1	40	2	40	0	41	1
2	81	2	84	2	84	0	84	0
3	118	3	122	2	122	0	125	1
4	152	4	165	2	165	0	166	2
5	198	*5*	202	2	203	3	206	1

În continuare se păstrează tabelul care va fi folosit pentru determinarea soluţiei optime:

N	X_1	X_2	X_3	X_4
0	0	1	0	0
1	1	2	0	1
2	2	2	0	0
3	3	2	0	1
4	4	2	0	2
5	*5*	2	3	1

Pentru *N*=5 se merge în ultima coloană şi se găseşte $x_4^* = 1$ deci se repartizează un grup în ultima centrală.

Se calculează: $N - x_4^* = 5 - 1 = 4$ ceea ce înseamnă că, la următorul pas se caută pe penultima linie până în penultima coloană, de unde rezultă $x_3^* = 0$ şi $N - x_4^* - x_3^* = 4$

În continuare se caută tot pe linia corespunzătoare lui *N*=4 în coloana X_3, rezultând $x_2^* = 2$ şi, mai departe:

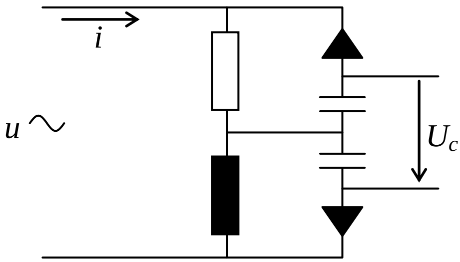
$$N - x_4^* - x_3^* - x_2^* = 2$$

$$x_1^* = 2$$

Deci, repartiţia optimă presupune repartizarea celor cinci grupuri în felul următor: câte două grupuri în prima şi a doua centrală şi un grup în ultima.

PROBLEMA 5

Se consideră circuitul din figura următoare.



Se cere să se determine valorile R şi X astfel încât să se minimizeze tensiunea continuă de ieşire U_c în regim permanent, respectând următoarele valori pentru valorile efective ale tensiunii alternative de intrare u şi curentului i:

$U = 110V$

$I = 0,1\,A$

Se va considera că ieşirea circuitului este în gol iar frecvenţa este de 50 Hz.

Pentru început nu se va include în problema de optimizare condiţia fizică R>0.

Modelul matematic este reprezentat de următoarele ecuaţii:

$$\min U_c = \min\left(-\sqrt{2}IR + \sqrt{2}IX\right) = \min\sqrt{2}\cdot 0,1(-R + X)$$

$$R^2 + X^2 = \left(\frac{110}{0,1}\right)^2$$

ceea ce este echivalent cu:

$$\min(-R + X)$$
$$R^2 + X^2 - 1.210.000 = 0$$

Funcţia Lagrange va fi de forma:

$$\mathsf{L}(R, X, \lambda) = -R + X + \lambda\left(R^2 + X^2 - 1.210.000\right)$$

iar sistemul de ecuaţii care trebuie rezolvat pentru determinarea soluţiei optime:

$$\begin{cases} -1 + 2\lambda R = 0 \\ 1 + 2\lambda X = 0 \\ R^2 + X^2 - 1.210.000 = 0 \end{cases}$$

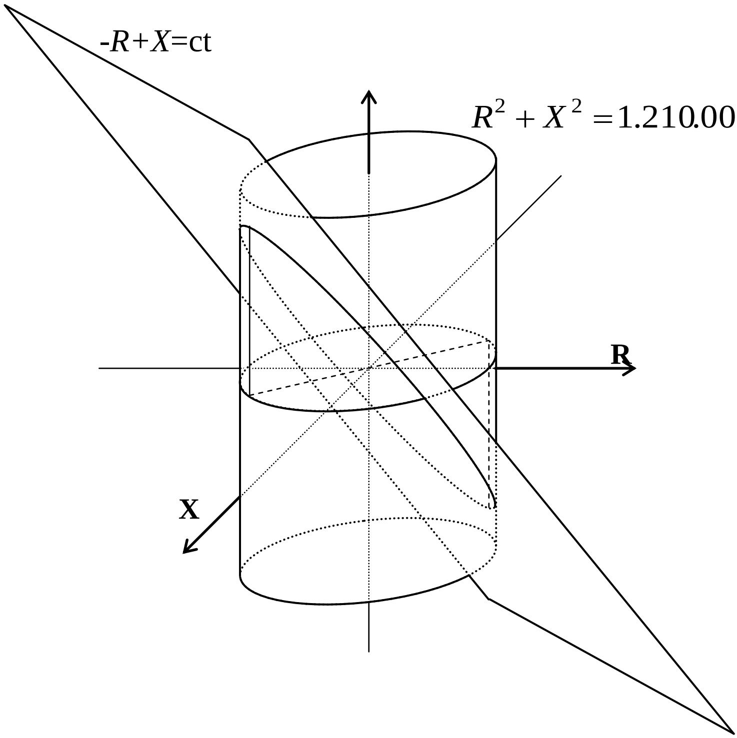
Acest sistem are două soluţii:

$$\begin{cases} R = \dfrac{1.100}{\sqrt{2}} \\ X = -\dfrac{1.100}{\sqrt{2}} \\ \lambda = \dfrac{1}{1.100\sqrt{2}} \end{cases} \qquad \begin{cases} R = -\dfrac{1.100}{\sqrt{2}} \\ X = \dfrac{1.100}{\sqrt{2}} \\ \lambda = -\dfrac{1}{1.100\sqrt{2}} \end{cases}$$

dintre care numai una, şi anume:

$$\begin{cases} R = \dfrac{1.100}{\sqrt{2}} \\ X = -\dfrac{1.100}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

corespunde soluţiei optime a problemei iniţiale, aşa cum se poate observa în figura următoare.



Prima dintre aceste soluţii reprezintă soluţia optimă căutată, cea de a doua reprezentând un punct de maxim pentru funcţia obiectiv şi nu unul de minim.

În continuare se va considera că se include şi condiţia ca rezistenţa circuitului să fie o mărime pozitivă în problema de optimizare, obţinând:

$$
\begin{aligned}
&\min(-R + X) \\
&R^2 + X^2 - 1.210.000 = 0 \\
&R \geq 0
\end{aligned}
$$

echivalentă cu:

$$
\begin{aligned}
&\min(-R + X) \\
&R^2 + X^2 - 1.210.000 = 0 \\
&R - y^2 = 0
\end{aligned}
$$

În acest caz funcţia Laplace va fi:

$$
\mathrm{L}(R, X, y, \lambda, \mu) = -R + X + \lambda\left(R^2 + X^2 - 1.210.000\right) + \mu\left(R - y^2\right)
$$

Punând condiţiile de extrem se obţine sistemul:

$$\begin{cases} -1+2\lambda R+\mu=0 \\ 1+2\lambda X=0 \\ -2\mu y=0 \\ R^2+X^2-1.210.000=0 \\ R-y^2=0 \end{cases}$$

cu soluţiile:

$$\begin{cases} R=\dfrac{1.100}{\sqrt{2}} \\ X=-\dfrac{1.100}{\sqrt{2}} \\ y=\dfrac{\sqrt{1.100}}{\sqrt[4]{2}} \\ \lambda=\dfrac{1}{1.100\sqrt{2}} \\ \mu=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} R=0 \\ X=1.100 \\ y=0 \\ \lambda=\dfrac{1}{2.200} \\ \mu=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} R=0 \\ X=-1.100 \\ y=0 \\ \lambda=-\dfrac{1}{2.200} \\ \mu=1 \end{cases}$$

Pe baza unui studiu local se determină că dintre cele trei soluţii numai prima este un punct de minim pentru funcţia obiectiv U_c, deci se obţine aceeaşi soluţie ca şi în cazul anterior.