**Metoda gradientului redus**

Metoda gradientului redus pentru rezolvarea problemelor de programare neliniară se bazează pe eliminarea, folosind sistemul de relații reprezentat de restricțiile verificate ca egalitate (restricțiile active), care constituie un sistem de ecuații, a unui număr de variabile prin exprimarea lor în funcție de celelalte, şi reducerea numărului de variabile ale funcției obiectiv. În acest fel, rezolvarea problemei de optimizare astfel modificate devine mult mai simplă.

Considerăm problema de optimizare:

$$\min F(x) \tag{8.1}$$

$$x = [x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n]^T \tag{8.2}$$

cu variabilele forțate să respecte restricțiile (presupuse de egalitate):

$$g_i(x) = 0 \quad i = \overline{1,m} \quad m < n \tag{8.3}$$

Metoda gradientului redus urmăreşte folosirea sistemului (8.3) pentru a elimina $m$ din cele $n$ variabile. În acest fel problema inițială se transformă într-o nouă problemă de optimizare, cu $n$-$m$ variabile, fără restricții. Eliminarea este uşoară atunci când restricțiile sunt liniare deoarece sistemul (8.3) este un sistem algebric liniar de $m$ ecuații cu $n$ necunoscute.

După alegerea necunoscutelor principale şi secundare se rezolvă sistemul, obținând necunoscutele principale sub forma unor expresii în care apar necunoscutele secundare. Aceste expresii se înlocuiesc în (8.1), obținând o nouă problemă de optimizare, fără restricții, care are doar $n$-$m$ variabile şi este echivalentă cu problema inițială.

Dacă există restricții neliniare, pentru eliminarea variabilelor se scrie funcția Lagrange asociată problemei de optimizare considerate:

$$\mathcal{L}(x,\lambda) = F(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x) \tag{8.4}$$

În continuare se consideră că dintre variabilele problemei inițiale se vor elimina primele *m* (dacă variabilele care vor fi eliminate se găsesc distribuite printre cele care vor fi păstrate se poate ajunge la această situație printr-o simplă renumerotare a variabilelor). Aceasta este echivalent cu a partiționa vectorul variabilelor *X* sub forma:

$$x = \begin{bmatrix} x^a & x^b \end{bmatrix}^T \tag{8.5}$$

în care:

$$\begin{aligned} x^a &= \begin{bmatrix} x_1 \ x_2 \cdots x_m \end{bmatrix}^T \\ x^b &= \begin{bmatrix} x_{m+1} \ x_{m+2} \cdots x_n \end{bmatrix}^T \end{aligned} \tag{8.6}$$

Dacă în (8.4) s-ar face înlocuirea variabilelor din $x^a$ cu expresii care conțin variabilele din $x^b$ astfel încât condițiile (8.3) să fie verificate ca egalități, s-ar obține o problemă de optimizare care ar fi echivalentă cu problema inițială şi:

$$\mathsf{L}(x^b) = F(x^b) \tag{8.7}$$

Termenii care conțin coeficienții lui Lagrange $\lambda_i$ nu se mai regăsesc printre variabilele funcției $\mathsf{L}$ deoarece condițiile (8.3) sunt verificate ca egalități (deci au valori nule) şi deci valorile coeficienților lui Lagrange nu mai influențează valoarea funcției $\mathsf{L}$.

Eliminarea variabilelor din $x^a$ în (8.4) este echivalentă cu a scrie:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \mathsf{L}(x,\lambda)}{\partial x_1} = 0 \\ &\frac{\partial \mathsf{L}(x,\lambda)}{\partial x_2} = 0 \\ &\vdots \\ &\frac{\partial \mathsf{L}(x,\lambda)}{\partial x_m} = 0 \end{aligned} \tag{8.8}$$

deci cu următorul sistem de ecuații liniare:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial F(x)}{\partial x_1} + \lambda_1 \frac{\partial g_1(x)}{\partial x_1} + \lambda_2 \frac{\partial g_2(x)}{\partial x_1} + \cdots + \lambda_m \frac{\partial g_m(x)}{\partial x_1} = 0 \\
&\frac{\partial F(x)}{\partial x_2} + \lambda_1 \frac{\partial g_1(x)}{\partial x_2} + \lambda_2 \frac{\partial g_2(x)}{\partial x_2} + \cdots + \lambda_m \frac{\partial g_m(x)}{\partial x_2} = 0 \\
&\vdots \\
&\frac{\partial F(x)}{\partial x_m} + \lambda_1 \frac{\partial g_1(x)}{\partial x_m} + \lambda_2 \frac{\partial g_2(x)}{\partial x_m} + \cdots + \lambda_m \frac{\partial g_m(x)}{\partial x_m} = 0
\end{aligned}
\tag{8.9}
$$

care are ca necunoscute coeficienții lui Lagrange. Acest sistem poate fi scris sub formă matriceală:

$$
\left[\frac{\partial g(x)}{\partial x^a}\right]^T \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{bmatrix} = -\left[\frac{\partial F(x)}{\partial x^a}\right]
\tag{8.10}
$$

cu:

$$
\begin{aligned}
&\left[\frac{\partial g(x)}{\partial x^a}\right] \overset{\text{not}}{=} \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1(x)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_1(x)}{\partial x_m} \\ \frac{\partial g_2(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2(x)}{\partial x_2} & \vdots & \frac{\partial g_2(x)}{\partial x_m} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial g_m(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial g_m(x)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_m(x)}{\partial x_m} \end{bmatrix} \\
&\left[\frac{\partial F(x)}{\partial x^a}\right] \overset{\text{not}}{=} \begin{bmatrix} \frac{\partial F(x)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial F(x)}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial F(x)}{\partial x_m} \end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{8.11}
$$

iar soluția lui:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{bmatrix} = -\left( \left[ \frac{\partial g(x)}{\partial x^a} \right]^T \right)^{-1} \left[ \frac{\partial F(x)}{\partial x^a} \right] \tag{8.12}$$

Derivatele funcției obiectiv L din (4) în raport cu variabilele din $x^b$ vor fi:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L(x,\lambda)}{\partial x_{m+1}} &= \frac{\partial F(x)}{\partial x_{m+1}} + \lambda_1 \frac{\partial g_1(x)}{\partial x_{m+1}} + \lambda_2 \frac{\partial g_2(x)}{\partial x_{m+1}} + \cdots + \lambda_m \frac{\partial g_m(x)}{\partial x_{m+1}} \\
\frac{\partial L(x,\lambda)}{\partial x_{m+2}} &= \frac{\partial F(x)}{\partial x_{m+2}} + \lambda_1 \frac{\partial g_1(x)}{\partial x_{m+2}} + \lambda_2 \frac{\partial g_2(x)}{\partial x_{m+2}} + \cdots + \lambda_m \frac{\partial g_m(x)}{\partial x_{m+2}} \\
&\vdots \\
\frac{\partial L(x,\lambda)}{\partial x_n} &= \frac{\partial F(x)}{\partial x_n} + \lambda_1 \frac{\partial g_1(x)}{\partial x_n} + \lambda_2 \frac{\partial g_2(x)}{\partial x_n} + \cdots + \lambda_m \frac{\partial g_m(x)}{\partial x_n}
\end{aligned}$$

(8.13)

Dacă se ține cont că prin eliminarea variabilelor din $x^a$ funcția Lagrange și noua funcție obiectiv $F(x^b)$ devin echivalente, relația anterioară devine, sub formă matriceală:

$$\left[ \frac{\partial F(x^b)}{\partial x^b} \right] = \left[ \frac{\partial F(x)}{\partial x^b} \right] + \left[ \frac{\partial g(x)}{\partial x^b} \right]^T \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{bmatrix} \tag{8.13}$$

cu notațiile:

$$\left[\frac{\partial g(x)}{\partial x^b}\right] \overset{\text{not}}{=} \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1(x)}{\partial x_{m+1}} & \frac{\partial g_1(x)}{\partial x_{m+2}} & \cdots & \frac{\partial g_1(x)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial g_2(x)}{\partial x_{m+1}} & \frac{\partial g_2(x)}{\partial x_{m+2}} & \vdots & \frac{\partial g_2(x)}{\partial x_n} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial g_m(x)}{\partial x_{m+1}} & \frac{\partial g_m(x)}{\partial x_{m+2}} & \cdots & \frac{\partial g_m(x)}{\partial x_n} \end{bmatrix} \qquad (8.14)$$

$$\left[\frac{\partial F(x)}{\partial x^b}\right] \overset{\text{not}}{=} \begin{bmatrix} \frac{\partial F(x)}{\partial x_{m+1}} \\ \frac{\partial F(x)}{\partial x_{m+2}} \\ \vdots \\ \frac{\partial F(x)}{\partial x_n} \end{bmatrix}; \quad \left[\frac{\partial F(x^b)}{\partial X^b}\right] \overset{\text{not}}{=} \begin{bmatrix} \frac{\partial F(x^b)}{\partial x_{m+1}} \\ \frac{\partial F(x^b)}{\partial x_{m+2}} \\ \vdots \\ \frac{\partial F(x^b)}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

sau, ținând cont de (8.11):

$$\left[\frac{\partial F(x^b)}{\partial x^b}\right] = \left[\frac{\partial F(x)}{\partial x^b}\right] - \left[\frac{\partial g(x)}{\partial x^b}\right]^T \left(\left[\frac{\partial g(x)}{\partial x^a}\right]^T\right)^{-1} \left[\frac{\partial F}{\partial x^a}\right] \qquad (8.15)$$

Relația (8.14) reprezintă formula gradientului redus deoarece permite calculul derivatelor noii funcții obiectiv (care depinde doar de *n-m* variabile) în funcție de derivatele funcției inițiale şi ale restricțiilor.

Din relația (8.11) se poate observa că variabilele care vor fi eliminate trebuie alese astfel încât matricea derivatelor restricțiilor în raport cu aceste variabile în punctul curent să fie nesingulară.

**Calculul coeficienților de penalitate**

Se consideră problema de optimizare care urmăreşte minimizarea pierderilor de putere activă într-o rețea de transport. Se consideră un sistem format din *m* noduri generatoare (dintre care primul este nodul de bilanț) şi *n-m* noduri consumatoare.

Forma matematică a problemei de optimizare este următoarea:

min $p$
min $p$

şi restricţiile:

$$P_i(\theta,U)-P_i=0;\quad i=\overline{2,n}$$
$$Q_j(\theta,U)-Q_j=0;\quad i=\overline{m+1,n}$$

în care prin $p$ s-au notat pierderile de putere activă în reţea:

$$p=\sum_{i=1}^{n}P_i$$

$P_i$, $Q_j$ reprezintă puterile activă şi respectiv reactivă impuse în nodurile $i$ şi respectiv $j$, $P_i(\theta,U)$ şi $Q_j(\theta,U)$ reprezintă valorile obţinute în urma calculului de reţea, folosind ca date de intrare vectorii fazelor $\theta$ şi valorilor efective $U$ ale tensiunilor nodale.

Sub formă generală, dacă se notează:

$$P'=\left[P_2,\ldots,P_n,Q_{m+1},\ldots,Q_n\right]^T$$
$$U'=\left[\theta_2,\ldots,\theta_n,U_{m+1},\ldots,U_n\right]^T$$

vectorii puterilor nodale şi respectiv ai mărimilor de stare electrice ale sistemului, se poate scrie că:

$$p=p(P',U')$$

Prin metoda gradientului redus se doreşte eliminarea variabilelor din $P'$, deci:

$$x^a=U';\quad x^b=P'$$

deci, prin particularizare în relațiile (8.14) şi (8.15) se va obține:

$$\left[\frac{\partial g(x)}{\partial x^a}\right]=\begin{bmatrix} \frac{\partial P_2}{\partial \theta_2} & \cdots & \frac{\partial P_2}{\partial \theta_n} & \frac{\partial P_2}{\partial U_{m+1}} & \cdots & \frac{\partial P_2}{\partial U_n} \\ \vdots & & & & & \\ \frac{\partial P_n}{\partial \theta_2} & \cdots & \frac{\partial P_n}{\partial \theta_n} & \frac{\partial P_n}{\partial U_{m+1}} & \cdots & \frac{\partial P_n}{\partial U_n} \\ \frac{\partial Q_{m+1}}{\partial \theta_2} & \cdots & \frac{\partial Q_{m+1}}{\partial \theta_n} & \frac{\partial Q_{m+1}}{\partial U_{m+1}} & \cdots & \frac{\partial Q_{m+1}}{\partial U_n} \\ \vdots & & & & & \\ \frac{\partial Q_n}{\partial \theta_2} & \cdots & \frac{\partial Q_n}{\partial \theta_n} & \frac{\partial Q_n}{\partial U_{m+1}} & \cdots & \frac{\partial Q_n}{\partial U_n} \end{bmatrix}=J$$

$J$ fiind matricea iacobian al sistemului.

$$\left[\frac{\partial F(x)}{\partial x^a}\right]=\left[\frac{\partial p}{\partial U'}\right]=\left[\frac{\partial(P_1+P_2+\ldots+P_n)}{\partial U'}\right]=$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{\partial P_1}{\partial \theta_2} & \cdots & \frac{\partial P_1}{\partial \theta_n} & \frac{\partial P_1}{\partial U_{m+1}} & \cdots & \frac{\partial P_1}{\partial U_n}\end{bmatrix}^T \overset{not}{=} \begin{bmatrix}\frac{\partial P_1}{\partial \theta} \\ \frac{\partial P_1}{\partial U}\end{bmatrix}$$

deoarece puterile $P_2, \ldots, P_n$ sunt constante, singura putere activă lăsată liberă într-un sistem electroenergetic fiind puterea centralei de bilanț.

$$\left[\frac{\partial g(x)}{\partial x^b}\right]=\left[\frac{\partial g(x)}{\partial P'}\right]=\begin{bmatrix}1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \vdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix}=I$$

$$\left[\frac{\partial F(x^b)}{\partial x^b}\right]=\left[\frac{\partial(P_1+P_2+\ldots+P_n)}{\partial P'}\right]=\begin{bmatrix}\underbrace{1 \ \ldots \ 1}_{(n-1)\text{ termeni}} & \underbrace{0 \ \ldots \ 0}_{(n-m)\text{ termeni}}\end{bmatrix}^T$$

$$\left[\frac{\partial F(x)}{\partial x^b}\right]=\left[\frac{\partial p}{\partial P'}\right]=\left[\frac{\partial p}{\partial P_2} \quad \cdots \quad \frac{\partial p}{\partial P_n} \quad \frac{\partial p}{\partial Q_{m+1}} \quad \cdots \quad \frac{\partial p}{\partial Q_n}\right]^T$$

Înlocuind aceste relații în formula gradientului redus se obține:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial p}{\partial P_2} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial p}{\partial P_n} \\ \dfrac{\partial p}{\partial Q_{m+1}} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial p}{\partial Q_n} \end{bmatrix} - I^T \cdot \left(J^T\right)^{-1} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial P_1}{\partial \theta_2} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial P_1}{\partial \theta_n} \\ \dfrac{\partial P_1}{\partial U_{m+1}} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial P_1}{\partial U_n} \end{bmatrix}$$

Coeficienții de penalizare se definesc ca:

$$L_i = \frac{1}{1-\dfrac{\partial p}{\partial P_i}} \overset{\text{not}}{=} \frac{1}{\beta_i}; \quad i=\overline{2,n}$$

şi se pot obține din relația corespunzătoare gradientului redus:

$$\begin{bmatrix} \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \\ \mu_{m+1} \\ \vdots \\ \mu_n \end{bmatrix} = -\left(J^T\right)^{-1} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial P_1}{\partial \theta_2} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial P_1}{\partial \theta_n} \\ \dfrac{\partial P_1}{\partial U_{m+1}} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial P_1}{\partial U_n} \end{bmatrix}$$