3. PROBLEME DE PROGRAMARE LINIARĂ DE DIMENSIUNI MARI

Una dintre cauzele care creează dificultăţi în rezolvarea problemelor de optimizare reale este dimensiunea acestora. În programarea matematică, mărimea unei probleme este o chestiune relativă, depinzând de mulţi parametri cum ar fi numărul de variabile şi numărul de restricţii sau complexitatea expresiilor funcţiei obiectiv şi a restricţiilor.

Din fericire, marea majoritate a problemelor de optimizare mari au o structură particulară care se traduce prin:

- existenţa unui număr mic de parametri numerici nenuli;
- gruparea elementelor nenule în blocuri diagonale;
- număr foarte mare de variabile şi relativ puţine restricţii sau invers, multe restricţii şi puţine variabile.

Formularea unei probleme de optimizare şi implementarea acesteia sub forma unei aplicaţii software este o sarcină imposibilă pentru problemele de dimensiune mare dacă nu au o structură specială. Astfel, în cazul unui program liniar cu 10^4 variabile şi 10^3 restricţii, matricea coeficienţilor restricţiilor ar avea 10^7 elemente. Dacă majoritatea acestora sunt nenule, introducerea lor de la tastatură este imposibil de realizat chiar pentru un număr mare de operatori.

3.1. Clasificarea metodelor de rezolvare a programelor liniare mari

În principiu metodele de rezolvare a programelor mari se împart în două categorii:

a. metode directe, care particularizează o procedură generală adaptând-o la specificul unei anumite clase de probleme de optimizare reprezentat printr-o formă particulară .

Astfel, în cazul algoritmului simplex principala problemă de calcul o constituie obţinerea inversei bazei curente. În cazul unei structuri particulare este posibil ca dimensiunea acestei matrici să se reducă semnificativ.

Dacă se consideră un program liniar cu variabile mărginite superior:

$$
\begin{aligned}
&\max F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\
&\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad i = 1,\ldots,m \\
&0 \le x_j \le u_j \quad j = 1,\ldots,n
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

Abordarea clasică presupunea transformarea condițiilor de limitare superioară în egalități:

$$
\begin{aligned}
&\max F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\
&\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad i = 1,\ldots,m \\
&x_j + x_{n+j} = u_j \quad j = 1,\ldots,n \\
&x_j \ge 0 \quad j = 1,\ldots,2n
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

care are ca rezultat un program cu $m+n$ restricții şi $2n$ variabile, ale cărui baze erau matrici de ordinul $m+n$. Forma particulară a restricțiilor de limitare superioară a putut fi exploatată eficient într-o particularizare a algoritmului simplex în care inversa bazei curente are dimensiunea egală cu numărul m al restricțiilor inițiale.

b. metode indirecte, bazate pe descompunerea problemei mari în subprobleme mai mici, interconectate. Subproblemele pot fi rezolvate independent şi simultan (dacă este posibil). Este necesar să existe un mecanism de coordonare, sub forma unei probleme particulare. Astfel, rezolvarea problemei originale mari se face la două niveluri:

- la primul nivel - inferior - se rezolvă subproblemele în care a fost descompusă problema inițială; soluțiile obținute sunt transmise către nivelul următor ;
- la al doilea nivel - superior - care analizează aceste rezultate şi transmite nivelului inferior noi parametri prin care se modifică subproblemele.

La primul nivel se face reoptimizarea problemelor iar noile rezultate sunt trimise nivelului superior care le analizează ş.a.m.d. Acest proces iterativ este convergent în sensul că într-un număr finit de paşi (transferuri de parametri şi rezultate între cele două niveluri), nivelul coordonator stabileşte soluția optimă.

3.2. Descompunerea în programarea liniară

Se consideră un program liniar în formă standard:

$$(P)\begin{cases} \max F = c^T x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases} \tag{3.3}$$

În continuare se va încerca rezolvarea problemei prin descompunerea sa în mai multe subprobleme mai mici, a căror rezolvare este intercorelată. Pentru aceasta se împarte sistemul $Ax=b$ al restricțiilor (care are mai multe necunoscute decât ecuații) în două sisteme mai mici:

- sistemul format din primele m_1 ($m_1<m$) restricții: $Mx=p$;
- sistemul format din cele $m_2=m - m_1$ restricții rămase: $Nx=q$.

Este cunoscut faptul că mulțimea soluțiilor admisibile ale sistemului liniar $Mx=p$: $D =\{x \in R^n \mid Mx = p , x \geq 0\}$ este un domeniu poliedral (o intersecție finită de semispații din R^n) care are un număr finit de vârfuri $v^1,v^2,...,v^s$. Aceste vârfuri reprezintă soluțiile admisibile de bază ale sistemului $MX = p$. În continuare se va presupune că D este mărginit (ipoteză care este îndeplinită în majoritatea cazurilor practice). În aceste condiții orice punct al domeniului poliedral D poate fi scris ca o combinație convexă a vârfurilor domeniului:

$$(\forall)x \in D \quad \exists \lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0, ..., \lambda_s \geq 0; \quad \lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_s = 1$$
$$\text{a.î. } x = \lambda_1 v^1 + \lambda_2 v^2 + ... + \lambda_s v^s$$

Înlocuind $x = \sum_{k=1}^{s} \lambda_k v^k$ în sistemul $Nx = q$ și în funcția obiectiv $F = c^T x$ se obține:

$$\begin{aligned} &Nx = q \rightarrow \sum_{k=1}^{s} \lambda_k (Nv^k) = q \\ &F = c^T x \rightarrow F = \sum_{k=1}^{s} \lambda_k (c^T v^k) \end{aligned} \tag{3.4}$$

Cu notațiile:

$$Q^k = Nv^k, \quad \gamma_k = c^T v^k \quad k = 1,...,s \tag{3.5}$$

se obține următorul program liniar echivalent cu programul (P):

$$(PM)\begin{cases} \max F = \sum_{k=1}^{s} \gamma_k \lambda_k \\ \sum_{k=1}^{s} \lambda_k = 1 \\ \sum_{k=1}^{s} \lambda_k Q^k = q \\ \lambda_k \geq 0 \quad k = 1,...,s \end{cases} \tag{3.6}$$

care are ca variabile scalarii $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_s$. Dacă $(\lambda_k^*, k = 1,...,s)$ este o soluție optimă a programului (PM) atunci $x^* = \sum_{k=1}^{s} \lambda_k^* v^k$ este o soluție optimă a programului original (P).

Programul (PM) se numeşte program coordonator (program master) şi are următoarele proprietăți:

- are mai puține restricții decât (P): doar m_2+1 față de $m=m_1+m_2$;
- are în general un număr foarte mare de variabile, câte una pentru fiecare vârf al domeniului D;
- rezolvarea programului (PM) necesită - cel puțin la prima vedere - cunoaşterea vârfurilor $v^1, v^2, ..., v^s$ fără de care nu se pot evalua colanele Q^k şi scalarii $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_s$. Determinarea apriorică a tuturor vârfurilor $v^1, v^2, ..., v^s$ este o sarcină dificilă.

Din fericire, aşa cum se va vedea în continuare, rezolvarea programului (PM) nu necesită cunoaşterea apriorică a tuturor vârfurilor $v^1, v^2, ..., v^s$. Pe parcursul aplicării algoritmului simplex acestui program, vârfurile domeniului *D*, absolut necesare în optimizare, vor fi obținute prin rezolvarea unor programe liniare de forma:

$$P(U)\begin{cases} \max \widetilde{F} = (c^T - u^T N)x \\ Mx = p \\ x \geq 0 \end{cases} \tag{3.7}$$

în care *u* este un vector ale cărui componente se stabilesc şi se modifică în funcție de stadiul rezolvării programului (PM).

Rezolvarea programului original (P) s-a redus la:

- rezolvarea programului coordonator (PM);
- rezolvarea mai multor probleme de forma P(u)

toate de dimensiuni mai mici decât cele ale programului (P).

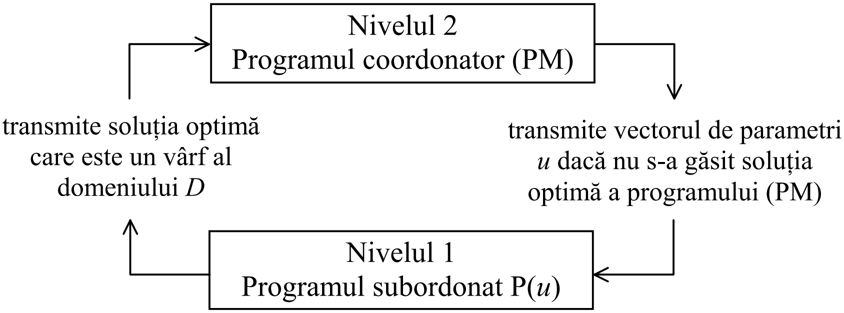

Figura 3.1 *Principiul metodei descompunerii*

Cele expuse mai sus constituie esența principiului de descompunere Dantzig – Wolfe care poate fi folosit atunci când programul (P) are un număr foarte mare de restricții. Avantajele descompunerii sunt mai importante dacă M are o structură diagonală:

$$M = \begin{bmatrix} M^1 & & & \mathbf{0} \\ & M^2 & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & M^r \end{bmatrix} \qquad (3.8)$$

în care $M^1, M^2, \ldots, M^r$ sunt matrici de diferite dimensiuni. Pentru simplificarea expunerii se va presupune că M are doar două blocuri M^1 şi M^2, deci programul (P) poate fi partiționat astfel:

$$\begin{array}{c} \\ M\left\{\begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\right. \\ N\{ \end{array} \overset{A}{\begin{array}{|c|c|} \hline M^1 & 0 \\ \hline 0 & M^2 \\ \hline N^1 & N^2 \\ \hline \end{array}} \quad \overset{b}{\begin{array}{|c|} \hline p^1 \\ \hline p^2 \\ \hline q \\ \hline \end{array}} \begin{array}{l} \left.\begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\right\} p \\ \\ \end{array} \quad \overset{c}{\begin{array}{|c|} \hline c^1 \\ \hline c^2 \\ \hline \end{array}} \quad \overset{x}{\begin{array}{|c|} \hline x^1 \\ \hline x^2 \\ \hline \end{array}} \qquad (3.9)$$

Programul (P) are deci forma:

$$(P)\begin{cases}\max F = c^T x\\ Ax = b\\ x \geq 0\end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases}\max F = \left(c^1\right)^T x^1 + \left(c^2\right)^T x^2\\ M^1 x^1 = p^1\\ M^2 x^2 = p^2\\ N^1 x^1 + N^2 x^2 = q\\ x^1 \geq 0\,,\, x^2 \geq 0\end{cases} \qquad (3.10)$$

Se observă că problema P(u) se descompune în două subprobleme independente (care pot fi rezolvate simultan):

$$P_1(u)\begin{cases}\max \widetilde{F}_1 = \left(\left(c^1\right)^T - u^T N^1\right) x^1\\ M^1 x^1 = p^1\\ x^1 \geq 0\end{cases} \qquad (3.11)$$

$$P_2(u)\begin{cases}\max \widetilde{F}_2 = \left(\left(c^2\right)^T - u^T N^2\right) x^2\\ M^2 x^2 = p_2\\ x^2 \geq 0\end{cases} \qquad (3.12)$$

Schema de rezolvare a programului (P) din figura 3.1 devine:

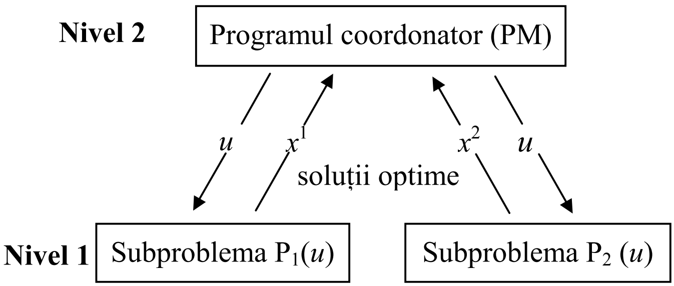

Figura 3.2 *Metoda descompunerii pentru restricții cu structură diagonală*

3.3. Interpretarea principiului de descompunere

Se consideră o economie cu mai mulți agenți, fiecare dintre aceştia desfăşurând un număr de activități de pe urma cărora obțin un anumit venit. Pentru desfăşurarea acestor activităților ei utilizează anumite resurse disponibile în cantități limitate. Obiectivul fiecărui agent este maximizarea venitului propriu.

Dacă fiecare agent ar deține controlul asupra tuturor resurselor necesare lui atunci maximizarea venitului la scara întregii economii s-ar reduce la maximizarea venitului fiecărui agent în parte. În realitate fiecare agent deține controlul asupra anumitor resurse numite resurse specifice: capacități proprii de producție, forța de muncă angajată, resurse financiare proprii, unele materii prime utilizate în exclusivitate.

Pe lângă resursele specifice, fiecare agent utilizează şi alte resurse care nu sunt la dispoziția sa exclusivă, denumite resurse comune; aceste resurse sunt procurate de pe piață, la concurență cu ceilalți agenți, datorită faptului că sunt disponibile în cantități limitate.

În acest context, problema principială care se pune este de a stabili cum vor fi repartizate resursele comune între agenți astfel încât, la scara întregii economii, venitul să fie maxim.

Într-o economie centralizată, repartizarea resurselor comune este făcută de stat care indică fiecărui agent ce şi cât să producă.

Se pune problema repartizării resurselor comune într-o economie descentralizată în care autoritatea centrală nu mai deține controlul asupra acțiunilor agenților.

Pentru ilustrarea principiului metodei se va analiza cazul ideal al unei economii liniare, caracterizate prin următoarele ipoteze:

- pentru fiecare activitate, consumurile de resurse şi venitul sunt direct proporționale cu nivelul la care este desfăşurată activitatea;
- nivelul de desfăşurare al unei activități poate fi reprezentat de orice număr real nenegativ;
- veniturile agenților nu se condiționează reciproc şi sunt egale cu suma veniturilor activităților desfăşurate de fiecare. Venitul la scara întregii economii este suma veniturilor agenților.

Pentru simplitate, în continuare se va considera că în economia studiată există numai doi agenți.

Se folosesc notațiile:
x^1, x^2 - vectorii programelor de producție ale celor doi agenți;
p^1 , p^2 - vectorii cantităților disponibile din resursele specifice;
M^1, M^2 - matricile consumurilor unitare de resurse specifice;
N^1, N^2 - matricile consumurilor unitare din resursele comune;
Q - vectorul cantităților disponibile de resurse comune;
c^1, c^2 - vectorii veniturilor unitare corespunzătoare activităților desfăşurate de cei doi agenți.

Evident, nivelele de operare ale activităților agenților sunt condiționate de cantitățile disponibile de resurse specifice:

$$\mathrm{M}^1 x^1 \le p^1 \qquad M^2 x^2 \le p^2 \tag{3.13}$$

şi în plus:

$$x^1 \ge 0 \qquad x^2 \ge 0 \tag{3.14}$$

Vectorii x^1, x^2 care satisfac relațiile (3.13) - (3.14) se vor numi programe posibile de activitate.

Un cuplu de programe posibile (x^1, x^2) devine realizabil numai dacă necesarul de resurse comune se încadrează în disponibilul dat adică:

$$N^1 x^1 + N^2 x^2 \le q \tag{3.15}$$

Venitul total pe sistem are expresia:

$$F = (c^1)^T x^1 + (c^2)^T x^2 \tag{3.16}$$

Reunind (3.13) – (3.16) obținem programul liniar:

$$(P)\begin{cases} \max F = \left(c^1\right)^T x^1 + \left(c^2\right)^T x^2 \\ M^1 x^1 \le p^1 \\ M^2 x^2 \le p^2 \\ N^1 x^1 + N^2 x^2 \le q \\ x^1 \ge 0,\ x^2 \ge 0 \end{cases} \tag{3.17}$$

Acesta modelează problema repartizării atât a resurselor specifice fiecărui agent câr şi a resurselor comune în vederea maximizării venitului pe întreaga economie.

Observăm că matricea programului are structura bloc diagonală cu restricții de cuplare, identică cu structura pe care s-a prezentat principiul de descompunere Dantzig - Wolfe.

Din punct de vedere formal, problema repartizării resurselor comune într-o economie descentralizată înseamnă rezolvarea programului (P) prin care se urmăreşte maximizarea venitului pe ansamblul economiei în condițiile în care nici agenții nici autoritatea centrală nu au informații complete asupra acestuia.

Astfel:
- agentul 1 controlează (cunoaşte) p^1, M^1, N^1, c^1;
- agentul 2 controlează (cunoaşte) p^2, M^2, N^2, c^2;
- autoritatea centrală controlează (cunoaşte) q.

Maximizarea venitului fiecărui agent, ținând seama numai de resursele sale specifice, revine formal la rezolvarea programelor:

$$(P_1)\begin{cases} \max F_1 = \left(c^1\right)^T x^1 \\ M^1 x^1 \le p^1 \\ x^1 \ge 0 \end{cases} \qquad (P_2)\begin{cases} \max F_2 = \left(c^2\right)^T x^2 \\ M^2 x^2 \le p^2 \\ x^2 \ge 0 \end{cases} \tag{3.18}$$

dar nu rezolvă problema repartizării resurselor comune deoarece, dacă $\overline{x}^1$ şi $\overline{x}^2$ sunt soluțiile optime ale programelor (3.18), este posibil ca:

$$N^1 \overline{x}^1 + N^2 \overline{x}^2 > q \tag{3.19}$$

În continuare se arată - în principiu - cum poate fi rezolvat programul (P) din (3.17) în situația în care nici autoritatea centrală şi nici agenții nu dețin informații complete asupra programului.

Se presupune că:

- între autoritatea centrală şi agenți există o cooperare în sensul unui schimb de informații privind intențiile de acțiune: fiecare agent transmite autorității centrale programul său de producție pe care îl consideră optim;
- autoritatea centrală îşi asumă rolul de arbitru în sensul că ea stabileşte un sistem de prețuri pe resursele comune iar agenții iau aceste prețuri ca impuse şi îşi diminuează veniturile cu valoarea resurselor comune pe care le solicită, fiindu-le necesare pentru desfăşurarea activității proprii. Fie u vectorul care are ca elemente aceste prețuri.

Ținând cont de considerentele anterioare rezultă că:

- agentul 1, pentru susținerea unui program posibil x^1 ($M^1x^1 \le p^1$, $x^1 \ge 0$), va trebui să suporte costurile suplimentare $u^TN^1x^1$ astfel că venitul său real va fi:

$$\widetilde{F}_1 = \left(c^1\right)^T x^1 - u^T N^1 x^1 = \left(\left(c^1\right)^T - u^T N^1\right)x^1 \qquad (3.20)$$

- analog, venitul real al agentului 2, rezultat din programul posibil X^2 ($A^2X^2 \le b^2$, $X^2 \ge 0$), va fi:

$$\widetilde{F}_2 = \left(c^2\right)^T x^2 - u^T N^2 x^2 = \left(\left(c^2\right)^T - u^T N^2\right)x^2 \qquad (3.21)$$

Maximizarea acestor venituri nete înseamnă rezolvarea programelor modificate:

$$P_1(U)\begin{cases} \max \widetilde{F}_1 = \left(\left(c^1\right)^T - u^T N^1\right)x^1 \\ M^1 x^1 \le p^1 \\ x^1 \ge 0 \end{cases} \qquad (3.22)$$

$$P_2(U)\begin{cases} \max \widetilde{F}_2 = \left(\left(c^2\right)^T - u^T N^2\right)x^2 \\ M^2 x^2 \le p^2 \\ x^2 \ge 0 \end{cases} \qquad (3.23)$$

Agenții comunică autorității centrale propunerile optimale din punctul lor de vedere $\widetilde{x}^1$ şi $\widetilde{x}^2$.

În principiu, autoritatea centrala analizează oportunitatea luării în considerare a acestor propuneri pentru maximizarea venitului pe economie şi poate decide modificarea sistemului de preţuri, mărind preţurile resurselor comune solicitate. Noile preţuri sunt comunicate agenţilor; aceştia vor căuta noi soluţii care să le maximizeze veniturile nete în noile condiţii.

Evident, prin creşterea preţurilor la anumite resurse comune (în special la cele pentru care se depăşeşte disponibilul), cererile din aceste resurse vor fi reduse. Formal, cele spuse înseamnă reluarea programelor $P_1(u)$, $P_2(u)$ cu u modificat.

Important este că într-un număr finit de asemenea schimburi de informaţii între agenţi şi autoritatea centrală, vor rezulta soluţiile x^{1*} şi x^{2*} care maximizează venitul total pe economie. În general, x^{1*} şi x^{2*} nu coincid cu una sau alta dintre propunerile agenţilor (propuneri făcute în cadrul dialogului sus amintit) ci sunt combinaţii convexe ale acestora. Tot odată va rezulta şi un sistem u^* de preţuri pe resursele comune în raport cu care x^{1*} şi x^{2*} maximizează veniturile nete individuale ale agenţilor. Spunem că tripletul (x^{1*}, x^{2*}, u^*) reprezintă un echilibru pentru economia (liniară) considerată.

Dialogul dintre autoritatea centrală şi agenţi poate fi reprezentat astfel:

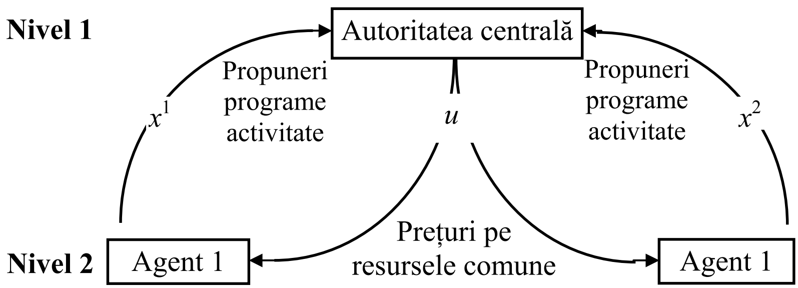

Fig. ?.3 *Găsirea soluţiei optime într-o economie descentralizată*

3.4. Algoritmul de descompunere Dantzig - Wolfe

Se admite pentru moment că sunt cunoscute toate constantele programului (PM) din (3.6). Vom aplica acestui program versiunea revizuită a algoritmului simplex.

Dacă se presupune cunoscută o bază admisibilă se poate împărți vectorul λ al variabilelor în raport cu această bază sub forma:

$$\lambda = \begin{bmatrix} \lambda^B \\ \lambda^R \end{bmatrix} \tag{3.24}$$

unde λ^B este vectorul variabilelor din bază iar λ^R al celor secundare**.**

Soluția $\overline{\lambda}$ asociată acestei baze va avea forma:

$$\overline{\lambda} = \begin{bmatrix} \overline{\lambda}^B \\ \overline{\lambda}^R \end{bmatrix} \quad \text{cu} \quad \begin{cases} \overline{\lambda}^B = B^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ q \end{bmatrix} \\ \overline{\lambda}^R = 0 \end{cases} \tag{3.25}$$

Baza fiind presupusă admisibilă, rezultă că $\overline{\lambda}^B$ are numai componente nenegative.

Fie $\pi^T = \left(\gamma^B\right)^T B^{-1}$ vectorul multiplicatorilor simplex asociați bazei considerate (γ^B este vectorul format din coeficienții γ_k ai variabilelor λ_k din λ^B)

Valoarea funcției obiectiv F în soluția de bază $\overline{\lambda}$ va fi:

$$\overline{F} = \pi^T \begin{bmatrix} 1 \\ q \end{bmatrix} \tag{3.26}$$

Elementele numerice $B^{-1}, \overline{\lambda}^B, \overline{F}$ și π pot fi reunite într-un tabel numit tabel simplex redus de forma următoare:

λ^B	$\overline{\lambda}^B$	B^{-1}
F	$\overline{F}$	π^T

(3.28)

Vectorul multiplicatorilor simplex π poate fi partiționat ca: $\pi = \begin{pmatrix} \pi_0 \\ u \end{pmatrix}$ cu π_0 fiind notată prima componentă iar u cuprinzându-le pe celelalte.

Testarea optimalității soluției admisibile curente $\overline{\lambda}$ necesită calcularea costurilor reduse:

$$\begin{aligned} \overline{\gamma}_k &\overset{def}{=} \pi^T \begin{bmatrix} 1 \\ Q^k \end{bmatrix} - \gamma_k = [\pi_0, u^T] \begin{bmatrix} 1 \\ Q^k \end{bmatrix} - \gamma_k = \\ &= \pi_0 + u^T Q^k - \gamma_k = \pi_0 + u^T N v^k - c^T v^k \quad = \\ &= \pi_0 - (c^T - u^T N) v^k \quad k = 1,\dots,s \end{aligned} \tag{3.29}$$

După cum se ştie, dacă $\overline{\gamma}_k \geq 0 \quad k = 1,\dots,s$ atunci $\overline{\lambda}$ este o soluție optimă a programului (PM).

Pentru a vedea dacă se întâmplă acest lucru este suficient să se evalueze:

$$\begin{aligned} &\min_{k=1,..,s} \overline{\gamma}_k = \min_{k=1,..,s} [\pi_0 - (c^T - u^T N) v^k] = \\ &= \pi_0 - \max_{k=1,..,s} (c^T - u^T N) v^k \end{aligned} \tag{3.30}$$

Se observă că $\max\limits_{k=1,..,s} (c^T - u^T N) v^k$ este valoarea maximă a funcției liniare $\widetilde{F} = (c^T - u^T N) x$ pe vârfurile mulțimii poliedrale mărginite D.

Evaluarea acestui maxim nu necesită cunoaşterea aprioriсă a vârfurilor $v^1,\dots,v^s$, fiind suficient să se rezolve programul liniar:

$$P(u)\begin{cases}\max \widetilde{F} = (c^T - u^T N)x \\ Mx = p \\ x \geq 0\end{cases} \tag{3.31}$$

Fie v^* o soluție optimă a programului $P(u)$ şi $\widetilde{F}^{\bullet}$ valoarea funcției obiectiv $\widetilde{F}$ în v^* (v^* fiind unul din vârfurile domeniului D). În aceste condiții se poate scrie:

$$\widetilde{F}^* = (c^T - u^T N)v^* = \max_{k=1,..,s}(c^T - u^T N)v^k \tag{3.32}$$

astfel că:

$$\min_{k=1,..,s} \overline{\gamma}_k = \pi_0 - \widetilde{F}^* \tag{3.33}$$

Dacă $\pi_0 - \widetilde{F}^* \geq 0$ (de fapt $\pi_0 - \widetilde{F}^* = 0$) atunci soluția $\overline{\lambda}$ este optimă, ceea ce permite găsirea soluției optime a problemei inițiale sub forma $x^* = \sum \overline{\lambda}_i v^i$ suma fiind făcută pentru toate componentele $\overline{\lambda}_i$ nenule şi vârfurile lui D corespunzătoare acestor componente.

Dacă $\pi_0 - \widetilde{F}^* < 0$ se calculează $Q^* = Nv^*$, $\gamma^* = c^T v^*$ şi se introduce în baza curentă coloana $\begin{bmatrix} 1 \\ Q^* \end{bmatrix}$.

După evaluarea coloanei $B^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ Q^* \end{bmatrix}$ se determină coloana care părăseşte baza actuală şi se pivotează tabelul simplex redus curent, intrându-se într-o nouă iterație.

Din descrierea făcută rezultă că ameliorarea soluției admisibile de bază $\overline{\lambda}$ - presupusă dată - nu a necesitat cunoaşterea de la început a tuturor vârfurilor domeniului D; vârful necesar în procesul de optimizare s-a obținut rezolvând un program liniar de forma P(u) cu un vector u adecvat.

Exemplu Se consideră o economie liniară descentralizată în cadrul căreia doi agenţi desfăşoară câte o activitate. Fie x_1 şi x_2 intensităţile celor două activităţi (de exemplu producţiile realizate). Resursele specifice controlate de fiecare din cei doi agenţi limitează intensităţile activităţilor după cum urmează: $x_1 \leq 4$, $x_2 \leq 3$

Susţinerea activităţilor necesită două resurse comune căror disponibil este limitat şi controlat de o autoritate centrală. Pentru o intensitate egală cu unitatea, vectorii consumurilor din cele două resurse comune sunt: $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ pentru prima activitate şi $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ pentru a doua. Vectorul cantităţilor disponibile din resursele comune este $\begin{bmatrix} 9 \\ 7 \end{bmatrix}$.

Veniturile unitare obţinute în urma celor două activităţi, exprimate în unităţi monetare, sunt de 7 pentru prima activitate şi de 6 pentru cea de a doua.

Fiecare agent caută să obţină un venit cât mai mare, dar ei nu deţin controlul asupra resurselor comune. Pe de altă parte, economia fiind descentralizată, autoritatea centrală nu poate impune agenţilor nivelurile la care aceştia trebuie să desfăşoare activităţile proprii.

Obiectivul urmărit este maximizarea venitului total pe economie.

Formal, problema constă în rezolvarea programului liniar:

$$(P)\begin{cases} \max f = 7x_1 + 6x_2 \\ x_1 \leq 3 \\ x_2 \leq 2 \\ 9x_1 + 15x_2 \leq 45 \\ 2x_1 + x_2 \leq 7 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

în situaţia în care nici agenţii, nici autoritatea centrală nu deţin "informaţii complete" asupra programului (P).

Soluția acestei probleme (obținută aplicând algoritmul simplex) este :

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{20}{7} \cong 2{,}857 \\ x_2 = \dfrac{9}{7} \cong 1{,}286 \end{cases}$$

După cum s-a văzut, rezolvarea este posibilă prin **cooperarea** dintre agenți şi autoritatea centrală, pe baza algoritmului de descompunere Dantzig - Wolfe.

Sistemul restricțiilor poate fi împărțit în două blocuri:

$$\begin{cases} x_1 \le 3 \\ x_2 \le 2 \end{cases} \Leftrightarrow \quad Mx \le p$$

$$\begin{cases} 9x_1 + 15x_2 \le 45 \\ 2x_1 + x_2 \le 7 \end{cases} \Leftrightarrow \quad Nx \le q \quad \text{unde} \quad N = \begin{bmatrix} 9 & 15 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad q = \begin{bmatrix} 45 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Principiul de descompunere propune rezolvarea programului:

$$\begin{cases} \max f = \sum_{k=1}^{s} \gamma_k \lambda_k \\ \sum_{k=1}^{s} \lambda_k = 1 \\ \sum_{k=1}^{s} \lambda_k Q^k \le \begin{bmatrix} 45 \\ 7 \end{bmatrix} \\ \lambda_k \ge 0 \quad k = 1,\dots,s \end{cases}$$

în care:

$$Q^k = Nv^k \quad \gamma_k = c^T v^k = [7 \quad 6] v^k \quad k = 1,\dots,s$$

unde $v^1,\dots,v^s$ sunt vârfurile mulțimii poliedrale:

$$D = \left\{ x = (x_1, x_2) \middle| Mx \le p, x \ge 0 \right\} = \left\{ x = (x_1, x_2) \middle| 0 \le x_1 \le 3; 0 \le x_2 \le 2 \right\}$$

Este evidentă mărginirea mulțimii D .

Forma matematică a acestei probleme echivalente, obținută ținând cont de vârfurile $v^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$; $v^2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$; $v^3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$; $v^4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ deci:

$$\gamma^1 = c^T v^1 = \begin{bmatrix} 7 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0;$$
$$\gamma^2 = c^T v^2 = 21; \quad \gamma^3 = c^T v^3 = 33; \quad \gamma^4 = c^T v^4 = 12$$

respectiv:

$$Q^1 = Nv^1 = \begin{bmatrix} 9 & 15 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$Q^2 = Nv^2 = \begin{bmatrix} 27 \\ 6 \end{bmatrix}; \quad Q^3 = Nv^3 = \begin{bmatrix} 57 \\ 8 \end{bmatrix}; \quad Q^4 = Nv^4 = \begin{bmatrix} 30 \\ 2 \end{bmatrix}$$

are forma:

$$\begin{cases} \max f = 21\lambda_2 + 33\lambda_3 + 12\lambda_4 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 1 \\ 27\lambda_2 + 57\lambda_3 + 30\lambda_4 \le 45 \\ 6\lambda_2 + 8\lambda_3 + 2\lambda_4 \le 7 \\ \lambda_k \ge 0 \quad k = 1,...,4 \end{cases}$$

cu două vârfuri ale poliedrului soluțiilor admisibile ca soluții optime:

$$\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,3571 \\ 0,5952 \\ 0,0467 \end{pmatrix} \qquad \lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,0476 \\ 0,3095 \\ 0,6429 \\ 0 \end{pmatrix}$$

O dată obținută soluția optimă $\{\lambda_k^*, k = 1,..., s\}$ a programului propus, soluția optimă a programului original (P) va rezulta din relația:

$$X^* = \sum_{k=1}^{s} \lambda_k^* v^k$$

respectiv:

$$x = 0v^1 + 0{,}3571v^2 + 0{,}5952v^3 + 0{,}0567v^4 = \begin{bmatrix} 2{,}857 \\ 1{,}286 \end{bmatrix};$$

şi:

$$x = 0{,}0476v^1 + 0{,}3095v^2 + 0{,}6429v^3 + 0v^4 = \begin{bmatrix} 2{,}857 \\ 1{,}286 \end{bmatrix};$$

rezultând tocmai soluția problemei de programare liniară inițială.

Se aplică algoritmul simplex revizuit formei standard:

$$(PM)\begin{cases} \max F = \sum_{k=1}^{s} \gamma_k \lambda_k \\ \sum_{k=1}^{s} \lambda_k = 1 \\ \sum_{k=1}^{s} \lambda_k Q^k + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 45 \\ 7 \end{bmatrix}, \\ \lambda_k \geq 0 \quad k = 1,\dots,s; \quad y_1, y_2 \geq 0 \end{cases}$$

Variabilele ecart y_1 , y_2 arată ce cantități din resursele comune R_1 , R_2 rămân nefolosite.

Programul (PM) are trei restricții şi se vede uşor că matricea sa conține coloanele unitare $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ şi $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ corespunzătoare variabilelor y_1 , y_2.

Pentru o bază unitară de start ar trebui şi coloana $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ care nu este tot aşa de "vizibilă". S-ar putea introduce o variabilă artificială în restricția de convexitate $\sum_{k=1}^{s} \lambda_k = 1$.

Pentru problema considerată se poate proceda mai simplu dacă se observă că vectorul nul $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ este unul din vârfurile $v^1,...,v^s$ ale domeniului D (nu întotdeauna este aşa); se poate presupune că $v^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Atunci $Q^1 = Nv^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ şi $\gamma_1 = c^T v^1 = 0$, în concluzie, matricea programului (PM) conține coloana unitară $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ Q^1 \end{bmatrix}$.

Astfel, pentru (PM) se dispune de baza unitară corespunzătoare variabilelor λ_1, y_1 şi y_2. Toate aceste variabile au coeficienți nuli în funcția obiectiv aşa că : $\gamma^B = (0,0,0)$. În consecință, vectorul multiplicatorilor simplex asociați bazei unitare indicate este:

$$\pi^T = \left(\gamma^B\right)^T B^{-1} = [0,0,0]$$

din care rezultă $\pi_0 = 0$, $u = [0,0]$. Vectorul valorilor variabilelor bazice are componentele:

$$\overline{\lambda}^B = B^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 45 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 = \lambda_1 \\ 45 = y_1 \\ 7 = y_2 \end{bmatrix}$$

Valoarea funcției obiectiv este:

$$\bar{f} = \gamma^B \overline{\lambda}^B = \pi \begin{bmatrix} 1 \\ 45 \\ 7 \end{bmatrix} = 0$$

Toate aceste elemente formează tabelul simplex redus de start:

(T$_1$)

λ_1	1	1	0	0
y_1	45	0	1	0
y_2	7	0	0	1
F	0	0	0	0

Considerarea vârfului $v^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ sugerează că, la inițierea dialogului între agenți şi autoritatea centrală, se pleacă de la situația în care cele două activități nu se desfăşoară: $x_1 = 0$, $x_2 = 0$.

Valorile $y_1 = 45$, $y_2 = 7$ arată că resursele R$_1$ şi R$_2$ nu sunt deocamdată solicitate.

S-a văzut că vectorul u are semnificația de sistem de prețuri pe resursele comune. Aceste prețuri sunt stabilite de către autoritatea centrală şi transmise agenților, care vor încerca să-şi maximizeze veniturile plătind costul resurselor comune solicitate. Propunerile de programe de activitate sunt transmise de cei doi agenți autorității centrale care încearcă, pe baza lor şi a propunerilor anterioare, să construiască o combinație care să se încadreze în disponibilul limitat de resurse comune şi să conducă la un venit total cât mai mare.

Iterația 1 Autoritatea centrală anunță sistemul de prețuri $u = (0,0)$ altfel spus oferă resursele comune gratuit.

Soluția poate fi găsită prin rezolvarea problemei:

$$P(u=(0,0))\begin{cases} \max \widetilde{F} = 7x_1 + 6x_2 \\ x_1 \quad \leq 3 \\ x_2 \leq 2 \\ x_1 \geq 0 \, , x_2 \geq 0 \end{cases}$$

care constă în rezolvarea de către agenți ai programelor:

$$P_1(u=(0,0))\begin{cases} \max \widetilde{F}_1 = 7x_1 \\ x_1 \leq 3 \\ x_1 \geq 0 \end{cases} \qquad P_2(u=(0,0))\begin{cases} \max \widetilde{F}_2 = 6x_2 \\ x_2 \leq 2 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

cu soluția optimă evidentă:

$$x_1^{\bullet} = 3\,,\, x_2^{\bullet} = 2\,,\, \widetilde{F}^{\bullet} = 7\cdot 3 + 6\cdot 2 = 33$$

pe care o trimit ca propunere de program de activitate autorității centrale; deoarece:

$$\pi_0 - \widetilde{F}^{\bullet} = 0 - 33 < 0$$

soluția obținut nu este optimă; baza curentă trebuie schimbată prin introducerea unei noi coloane din matricea programului (PM). Această coloană se generează astfel:

Vectorul $\begin{bmatrix} x_1^{\bullet} = 3 \\ x_2^{\bullet} = 2 \end{bmatrix}$- notat în teorie cu v^* - este un alt vârf al domeniului D , să zicem v^2. Calculăm:

$$v^2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow Q^2 = Nv^2 = \begin{bmatrix} 9 & 15 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 57 \\ 8 \end{bmatrix},\;\; \gamma_2 = c^T v^2 = [7 \quad 6] \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = 33$$

Coloana care intră în bază va fi: $\begin{bmatrix} 1 \\ Q^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 57 \\ 8 \end{bmatrix}$.

Calculele uzuale ale unei iterații din algoritmul simplex revizuit sunt indicate mai jos:

					$\begin{bmatrix} 1 \\ Q^2 \end{bmatrix}$	$B^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ Q^2 \end{bmatrix}$	
λ_1	1	1	0	0	1	1	
y_1	45	0	1	0	57	$\boxed{57}$	
y_2	7	0	0	1	8	8	
F	0	0	0	0		-33	$\leftarrow \pi_0 - \widetilde{F}^{\bullet}$

$\Rightarrow$ (T_2)

λ_1	4/19	1	-1/57	0
λ_2	15/19	0	1/57	0
y_2	13/19	0	-8/57	1
F	495/19	0	11/19	0
		$\uparrow$ π_0	$\underbrace{\qquad\qquad}_{u}$	

Iterația 2 Autoritatea centrală anunță noile prețuri: u= (11/19 , 0).

După cum se vede, resursa R_2 este încă oferită gratuit, deoarece y_2 = 13/19 arată că:

$$\widetilde{x} = \lambda_1 v^1 + \lambda_2 v^2 = \frac{4}{19}\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} + \frac{15}{19}\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x_1 = 45/19\\ x_2 = 30/19\end{bmatrix}$$

nu utilizează integral această resursă. Se determină vectorul veniturilor unitare nete:

$$c^T - u^T N = [7,6] - \left[\frac{11}{19},0\right]\begin{bmatrix}9 & 15\\ 2 & 1\end{bmatrix} = \left[\frac{34}{19}, \quad -\frac{51}{19}\right]$$

Agenții vor avea de rezolvat programele:

$$P_1\left(u = \begin{pmatrix}\frac{11}{19}\\ 0\end{pmatrix}\right)\begin{cases}\max \widetilde{F}_1 = \frac{34}{19}x_1\\ x_1 \leq 3\\ x_1 \geq 0\end{cases} \qquad P_2\left(u = \begin{pmatrix}\frac{11}{19}\\ 0\end{pmatrix}\right)\begin{cases}\max \widetilde{F}_2 = -\frac{51}{19}x_2\\ x_2 \leq 2\\ x_2 \geq 0\end{cases}$$

a cărui soluție optimă este:

$$x_1^\bullet = 3\,,\, x_2^\bullet = 0\,,\, \widetilde{F}^\bullet = \frac{34}{19}\cdot 3 = \frac{102}{19}$$

Soluția obținută arată că la costul actual al resurselor comune agentul 1 are un venit net pozitiv, deci își poate permite să procure resursele R_1 şi R_2 în cantitățile necesare pentru desfăşurarea activității sale la nivelul maxim posibil 3.

Pentru agentul 2, resursa R_1 are un cost prea ridicat: oricât de mic ar fi nivelul de desfăşurare al activității proprii, costul resurselor R_1 şi R_2 depăşeşte venitul său astfel că decizia sa va fi să întrerupă activitatea.

Deoarece :

$$\pi_0 - \widetilde{f}^{\bullet} = 0 - \frac{102}{19} < 0$$

combinația $\widetilde{x}$ obținută din tabelul (T_2) nu este optimă.

Noua propunere a agenților $\begin{bmatrix} x_1 = 3 \\ x_2 = 0 \end{bmatrix}$ este un alt vârf, să zicem v^3, al mulțimii D , care va produce coloana ce îmbunătățeşte baza curentă:

$$v^3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow Q^3 = Nv^3 = \begin{bmatrix} 9 & 15 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\gamma_3 = c^T v^3 = [7,6] \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} = 21$$

În aceste condiții intră în bază coloana:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ Q^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 27 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Pivotăm tabelul curent (T_2):

					$\begin{bmatrix} 1 \\ Q^3 \end{bmatrix}$	$B^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ Q^3 \end{bmatrix}$
λ_1	4/19	1	-1/57	0	1	10/19
λ_2	15/19	0	1/57	0	27	9/19
y_2	13/19	0	-8/57	1	6	$\boxed{42/19}$
F	495/19	0	0	0		-102/19 $\leftarrow \pi_0 - \widetilde{F}^{\bullet}$

$\Rightarrow$ (T_3)

λ_1	1/21	1	1/63	-5/21
λ_2	9/14	0	1/21	-3/14
λ_3	13/42	0	-4/63	19/42
F	194/7	0	5/21	17/7
		$\uparrow$ π_0	$\underbrace{\qquad\qquad}_{u}$	

Iterația 3 Noul sistem de prețuri pe resursele comune anunțat de autoritatea centrală va fi:

$u^T = (5/21\ ,\ 17/7)$

Veniturile unitare nete ale agenților devin:

$$c^T - u^T N = [7,6] - \left[\frac{5}{21}, \frac{17}{7}\right]\begin{bmatrix} 9 & 15 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = [7,6] - [7,6] = [0,0]$$

Astfel, funcția obiectiv a programului P(u = (5/21,17/7)) este constantă: $\widetilde{F} = (c^T - u^T N)x = 0$ şi în consecință valoarea ei maximă va fi $\widetilde{F}^\bullet = 0$. Deoarece $\pi_0 - \widetilde{F}^\bullet = 0 - 0 = 0$ soluția din tabelul (T_3) este soluția optimă a programului (PM). Soluția optimă a programului original (P) este combinația convexă a celor trei "propuneri" v^1, v^2, v^3:

$$x^\bullet = \lambda_1^\bullet v^1 + \lambda_2^\bullet v^2 + \lambda_3^\bullet v^3 = \frac{1}{21}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{9}{14}\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} + \frac{13}{42}\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^\bullet = 2{,}857 \\ x_2^\bullet = 1{,}286 \end{bmatrix}$$

iar venitul maxim total are valoarea (max)F = 194/7.