5.1 Probleme de programare convexă

Problemele de programare convexă reprezintă o clasă importantă de probleme de optimizare neliniară care se caracterizează prin:

- funcție obiectiv convexă dacă aceasta se minimizează (echivalent: funcție obiectiv concavă dacă se maximizează);
- restricțiile inegalități sunt de forma $g_i(x) \leq 0$ în care g_i este o funcție convexă (echivalent $g_i(x) \geq 0$ cu g_i funcție concavă);
- eventualele restricții egalități sunt liniare, cerință motivată prin aceea că funcțiile liniare sunt singurele funcții simultan convexe şi concave.

Problemele convexe au următoarele proprietăți fundamentale:

- mulțimea soluțiilor admisibile este convexă;
- funcția obiectiv admite cel mult un optim local care este automat şi un optim global şi va reprezenta soluția problemei;
- dacă optimul liber (nerestricționat) al funcției obiectiv nu este o soluție admisibilă atunci optimul restricționat se găseşte obligatoriu pe frontiera domeniului soluțiilor admisibile .

Importanța acestei clase de probleme este foarte mare deoarece în acest domeniu a fost depus cel mai mare efort de cercetare, obținându-se cele mai puternice rezultate teoretice (cum ar fi teoria dualității neliniare, condițiile de optimalitate Kuhn – Tucker) şi practice (metode şi algoritmi de optimizare).

Deoarece orice problemă de programarea liniară este şi o problemă de programare convexă, fundamentarea metodelor de rezolvare a problemelor convexe reprezintă un pas în unificarea programării liniare şi a programării neliniare.

Mai mult, majoritatea problemelor de optimizare neliniară la care conduc modelele matematice din domeniul tehnic şi economic conțin funcții convexe, deci au aplicații multiple în aceste domenii.

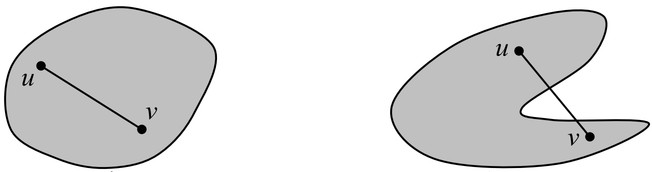
Ținând cont de cele menționate acest tip de probleme vor fi tratate în paragrafele următoare.

5.1.1. Funcții convexe

Mulțimea $\Omega \subset V$ se numeşte *convexă* dacă oricare ar fi două puncte $u, v \in \Omega$ segmentul care le uneşte este cuprins în întregime în interiorul mulțimii: $[u, v] \subset \Omega$. Matematic această condiție poate fi transcrisă ca:

$$\forall u, v \in \Omega, \quad \forall \rho \in [0,1] \Rightarrow \rho \cdot u + (1-\rho)v \in \Omega \tag{5.1}$$

În figura 5.1 sunt reprezentate un domeniu convex şi un domeniu neconvex în plan.



Domeniu convex Domeniu neconvex

Figura 5.1 *Domeniu convex şi neconvex*

O funcție reală definită pe un domeniu convex Ω ($F\colon \Omega \to \mathbb{R}$) se numeşte *convexă* dacă pentru orice două puncte din domeniu este verificată relația:

$$F\left(\rho \cdot u + (1-\rho)v\right) \leq \rho \cdot F(u) + (1-\rho)F(v) \tag{5.2}$$

O funcție reală definită pe un domeniu convex Ω ($F\colon \Omega \to \mathbb{R}$) se numeşte *strict convexă* dacă pentru orice două puncte din domeniu este verificată relația:

$$F\left(\rho \cdot u + (1-\rho)v\right) < \rho \cdot F(u) + (1-\rho)F(v) \tag{5.3}$$

O funcție reală definită pe un domeniu convex Ω ($G\colon \Omega \to \mathbb{R}$) se numeşte *concavă* dacă –G este convexă.

Pentru funcțiile convexe pot fi enunțate o serie de teoreme importante pentru rezolvarea problemelor de optimizare.

Tr. Dacă F_1 şi F_2 sunt două funcții convexe definite pe acelaşi domeniu convex F_1, F_2:$\Omega \to \mathbb{R}$ şi k_1, k_2 coeficienţi reali nenegativi; atunci $F: \Omega \to \mathbb{R}$ prin $F(x)=k_1F_1(x)+k_2F_2(x)$ este funcţie convexă.

Tr. Dacă $F: \Omega \to \mathbb{R}$ este o funcţie convexă şi $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_n$ coeficienţi reali nenegativi care verifică relaţia $\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n=1$, atunci:

$$F(\lambda_1 x_1+\cdots+\lambda_n x_n) \le \lambda_1 \cdot F(x_1)+\cdots+\lambda_n \cdot F(x_n) \tag{5.4}$$

oricare ar fi punctele $x_1,\ldots,x_n$ din Ω.

Tr. (convexitate şi derivabilitate)

Se consideră o funcţie reală definită pe un domeniu deschis ($F: U \to \mathbb{R}$, U-domeniu deschis din $\mathbb{R}^n$) şi $\Omega \subset U$ un domeniu convex.

Dacă F este diferenţiabilă, atunci pe domeniul Ω sunt valabile următoarele afirmaţii:

1. F-convexă $\Leftrightarrow F(v) \ge F(u)+\langle \nabla F(u), v-u \rangle \quad \forall u,v \in \Omega$
2. F-strict convexă $\Leftrightarrow F(v) > F(u)+\langle \nabla F(u), v-u \rangle \quad \forall u,v \in \Omega$
3. $\langle \nabla F(u+\lambda d), d \rangle$ este o funcţie nedescrescătoare în raport cu λ

($\nabla F(u)$ - gradientul funcţiei F în punctul u, $\langle a,b \rangle$ - produsul scalar al vectorilor a şi b, – a se vedea anexa).

Tr. (convexitate şi derivabilitate de ordinul II)

Se consideră o funcţie reală definită pe un domeniu deschis ($F: U \to \mathbb{R}$, U-domeniu deschis din $\mathbb{R}^n$) şi $\Omega \subset U$ un domeniu convex.

În aceste condiţii, dacă F este de două ori diferenţiabilă:

1. F-convexă pe $\Omega \Leftrightarrow$ matricea hessian $\nabla^2 F(x)$ este pozitiv semidefinită ($\nabla^2 F(x) \ge 0$ sau, echivalent, $\langle d, \nabla^2 F(x) \cdot d \rangle \ge 0 \quad \forall\, d \in \mathbb{R}^n$)
2. Dacă matricea hessian $\nabla^2 F(x)$ pozitiv definită ($\nabla^2 F(x) \ge 0$ sau, $\langle d, \nabla^2 F(x) \cdot d \rangle > 0 \quad \forall\, d \in \mathbb{R}^n$) $\Rightarrow$ F-strict convexă pe Ω

($\nabla^2 F(x)$ - matricea hessian a funcţiei F în punctul x- definită în anexă)

5.1.2 Formularea unei probleme de programare convexă

Această problemă se încadrează în categoria problemelor de programare convexă dacă sunt îndeplinite următoarele condiții:

a. restricțiile $g_i(x)$ împreună cu condițiile de nenegativitate separă în domeniul de definiție al funcției obiectiv $F(x)$ un domeniu al soluțiilor admisibile care este mulțime convexă;

b. pe domeniul soluțiilor admisibile funcția obiectiv este o funcție convexă.

Se poate spune că o problemă de programare convexă cere găsirea minimului unei funcții convexe pe un domeniu convex definit de mulțimea restricțiilor problemei.

După cum se observă, nu se impune ca funcția obiectiv să fie convexă pe întreg domeniul său de definiție ci numai pe domeniul soluțiilor admisibile.

Din această cauză se poate formula o problemă de programare convexă şi sub forma:

$$\begin{aligned} &\min F(x) \\ &x \in \chi \\ &\chi \text{ - convex} \end{aligned} \tag{5.6}$$

Avantajul problemelor de programare convexă rezultă din următoarea teoremă:

Tr. Orice minim local al unei probleme de programare convexă este şi minim global. Dacă $F(x)$ este strict convexă atunci soluția optimă, dacă există, este unică.

Odată găsit un minim al unei probleme de programare convexă nu se mai pune problema dacă acesta este şi minimul global sau trebuie căutat un alt minim care să fie soluția problemei de optimizare.