PROGRAMAREA LINIARĂ

1. O centrală termoelectrică (CTE) are două grupuri de 50 MW. Primul grup are un consum specific de 0,4 tcc/MWh, iar cel de-al doilea de 0,5 tcc/MWh.

Pentru 10 ore de funcționare stocul de combustibil este 400 tcc. Să se determine încărcarea fiecărui grup astfel încât cantitatea de energie produsă să fie maximă.

Notăm:
x_1 – încărcarea primului grup, [MW];
x_2 – încărcarea celui de-al doilea grup, [MW].

Forma canonică a problemei de programare liniară este:

$\max F(x_1, x_2) = 10 \cdot x_1 + 10 \cdot x_2$ - funcția de maximizare

$$\begin{cases} x_1 \le 50 \\ x_2 \le 50 \\ 0{,}4 \cdot 10 \cdot x_1 + 0{,}5 \cdot 10 \cdot x_2 \le 400 \end{cases}$$ - sistem de restricții

$$x_1 \ge 0; \quad x_2 \ge 0$$

Trecerea de la ***forma canonică*** la ***forma standard*** se face prin adăugarea unei variabile suplimentare (de egalizare) pentru fiecare inecuație a sistemului de restricții.

În cazul nostru sistemul are trei inecuații, deci se vor introduce trei variabile de egalizare notate: x_3, x_4, x_5.

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 50 \\ x_2 + x_4 = 50 \\ 0{,}4 \cdot 10 \cdot x_1 + 0{,}5 \cdot 10 \cdot x_2 + x_5 = 400 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0; \quad x_2 \ge 0; \quad x_3 \ge 0; \quad x_4 \ge 0; \quad x_5 \ge 0$$

Acest sistem se mai poate scrie:

$$\begin{cases} x_1 + 0 \cdot x_2 + x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 = 50 \\ 0 \cdot x_1 + x_2 + 0 \cdot x_3 + x_4 + 0 \cdot x_5 = 50 \\ 4 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + x_5 = 400 \end{cases}$$

Din sistemul de ecuații se construiește matricea A și b:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \qquad b = \begin{bmatrix} 50 \\ 50 \\ 400 \end{bmatrix}$$

Funcția de maximizare devine:

$$\max F(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = 10 \cdot x_1 + 10 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5$$

Se construiește matricea C:

$$C = [10 \quad 10 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

Se trasează un tabel în care se trec pe coloane mai întâi variabilele de egalizare (în cazul nostru x_3, x_4 și x_5) și apoi variabilele care trebuie determinate (cazul nostru x_1 și x_2), valorile fiind luate din matricea A.

Coloana care iese din vectorul de bază

Coloana care intră în vectorul de bază

La numitor se trece vectorul coloană care intră în bază (cazul nostru x_1)

vector de bază

pivot

	x_3	x_4	x_5	x_1	x_2	$B^{-1}\cdot b$	$\min \frac{B^{-1}\cdot b}{x_1}$
	1	0	0	$\boxed{1}$	0	50	50/1 = 50
	0	1	0	0	1	50	50/0 = -
	0	0	1	4	5	400	400/4 = 100
C_j	0	0	0	10	10		
Z_j	-	-	-	0	0		
Z_j-C_j	-	-	-	-10 <0	-10 <0		

Completarea tabelului:

- coloanele x_3, x_4, x_5, x_1, x_2 se completează cu valorile din matricea A;
- $B^{-1}\cdot b = b$;
- linia C_j se completează cu valorile din matricea C;
- linia Z_j se completează astfel: sub matricea unitate (coloanele x_3, x_4, x_5) se trece „linie” → „-”, iar sub coloanele x_1, x_2 valorile se calculează astfel:

$$C_j \cdot x_1 = 0\cdot 1 + 0\cdot 0 + 0\cdot 4 = 0$$

$$C_j \cdot x_2 = 0\cdot 0 + 0\cdot 1 + 0\cdot 5 = 0$$

- se calculează apoi diferenţa Z_j-C_j, rezultând pe coloanele x_1 şi x_2 valorile –10 şi –10. Deoarece există diferenţe (negative) Z_j-C_j<0 **rezultă că soluţia nu este optimă**;
- se caută maximul diferenţelor negative $\max\left|Z_j - C_j\right|$ astfel:

$$\max\left|Z_j - C_j\right| = \max\left|-10, -10\right| = \max(10, 10) = 10$$

Valoarea 10 se găseşte pe coloana x_1 şi pe coloana x_2. *Deoarece valorile sunt egale se alege una din variabilele x_1 sau x_2.* **Alegem vectorul x_1, deci rezultă că vectorul x_1 intră în bază**.

- pentru a determina vectorul care iese din bază se pune condiţia:

$$\min\left\{\frac{B^{-1}\cdot b}{x_1}\right\} \Rightarrow \min\left\{\frac{50}{1}, \frac{50}{0}, \frac{400}{4}\right\} = \min\{50,\ -,\ 100\} = 50$$

Deoarece valoarea 50 se găseşte pe prima linie, se caută pe această linie în vectorul de bază valoarea „1”. În cazul nostru cifra „1” am găsit-o pe coloana x_3, rezultă că x_3 iese din bază.

- se stabileşte pivotul care se găseşte la intersecţia dintre coloana care intră în vectorul de bază (x_1 în cazul nostru) şi linia pe care am găsit minimul $\min\left\{\frac{B^{-1}\cdot b}{x_1}\right\} = 50$ (prima linie în cazul nostru).

Se completează un nou tabel, astfel:

- x_1 şi x_3 îşi schimbă poziţiile între ele **dar nu şi valorile**;
- în vectorul de bază (sub x_1, x_4, x_5) se completează matricea unitate $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

	$\mathbf{x_1}$	$\mathbf{x_4}$	$\mathbf{x_5}$	$\mathbf{x_3^{p1}}$	$\mathbf{x_2^{p1}}$	$\mathbf{B^{-1}\cdot b^{p1}}$	$\mathbf{\min \frac{B^{-1}\cdot b^{p1}}{x_2}}$
	1	0	0	1	0	50	50/0 = -
	0	1	0	0	1	50	50/1 = 50
	0	0	1	-4	$\boxed{5}$	200	200/5 = 40
C_j	10	0	0	0	10		
Z_j	-	-	-	10	0		
Z_j-C_j	-	-	-	+10	-10		
				>0	<0		

- coloanele x_3^{p1}, x_2^{p1} şi $B^{-1}\cdot b^{p1}$ se recalculează cu regula pivotului;

x_3	x_1	x_3^{p1}
a = 1	d = $\boxed{1}$	a/d=1 / $\boxed{1}$ = 1 – pe linia cu pivotul elementul se împarte la pivot
b = 0	e = 0	$b-\frac{e\cdot a}{d}=0-\frac{0\cdot 1}{\boxed{1}}=0$
c = 0	f = 4	$c-\frac{f\cdot a}{d}=0-\frac{4\cdot 1}{\boxed{1}}=-4$

x_2	x_1	x_2^{p1}
0	$\boxed{1}$	0 / $\boxed{1}$ = 0
1	0	$1-\frac{0\cdot 0}{\boxed{1}}=1$
5	4	$5-\frac{4\cdot 0}{\boxed{1}}=5$

$B^{-1}\cdot b$	x_1	$B^{-1}\cdot b^{p1}$
50	$\boxed{1}$	50 / $\boxed{1}$ = 50
50	0	$50-\frac{0\cdot 50}{\boxed{1}}=50$
400	4	$400-\frac{4\cdot 50}{\boxed{1}}=200$

- linia C_j se completează din matricea C, ţinând cont de valorile lui $x_1 \div x_5$;
- linia Z_j se completează astfel: sub matricea unitate (coloanele x_1, x_4, x_5) se trece „linie” → „-”, iar sub coloanele x_3^{p1}, x_2^{p1} valorile se calculează astfel:

$$C_j \cdot x_3^{p1} = 10\cdot 1 + 0\cdot 0 + 0\cdot(-4) = 10$$

$$C_j \cdot x_2^{p1} = 10\cdot 0 + 0\cdot 1 + 0\cdot 5 = 0$$

- se calculează apoi diferenţa Z_j-C_j, rezultând pe coloanele x_3^{p1} şi x_2^{p1} valorile +10 şi –10. Deoarece există o diferenţă (negativă) Z_j-C_j<0 **rezultă că soluţia nu este optimă**;

- se caută maximul diferențelor negative $\max\left|Z_j - C_j\right|$ astfel:

$$\max\left|Z_j - C_j\right| = \max\left|-10\right| = \max(10) = 10$$

Deoarece valoarea +10 se găseşte pe coloana x_2^{p1} **rezultă că vectorul $\mathbf{x_2^{p1}}$ intră în bază**.

- pentru a determina vectorul care iese din bază se pune condiția:

$$\min\left\{\frac{B^{-1}\cdot b^{p1}}{x_2^{p1}}\right\} \Rightarrow \min\left\{\frac{50}{0}, \frac{50}{1}, \frac{200}{5}\right\} = \min\{-,\ 50,\ 40\} = 40$$

Deoarece valoarea 40 se găseşte pe a treia linie, se caută pe această linie în vectorul de bază valoarea „1”. În cazul nostru cifra „1” am găsit-o pe coloana x_5, rezultă că x_5 iese din bază.

- se stabileşte pivotul care se găseşte la intersecția dintre coloana care intră în vectorul de bază (x_2^{p1} în cazul nostru la acest pas) şi linia pe care am găsit minimul $\min\left\{\frac{B^{-1}\cdot b^{p1}}{x_2^{p1}}\right\} = 40$ (a treia linie în cazul nostru la acest pas).

Se completează un nou tabel, astfel:

- x_5 şi x_2 îşi schimbă pozițiile între ele **dar nu şi valorile**;
- în vectorul de bază (sub x_1, x_4, x_2^{p1}) se completează matricea unitate $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

	$\mathbf{x_1}$	$\mathbf{x_4}$	$\mathbf{x_2^{p1}}$	$\mathbf{x_3^{p2}}$	$\mathbf{x_5^{p2}}$	$\mathbf{B^{-1}\cdot b^{p2}}$
	1	0	0	1	0	50
	0	1	0	0,8	-0,2	10
	0	0	1	-0,8	0,2	40
C_j	10	0	10	0	0	
Z_j	-	-	-	2	2	
Z_j-C_j	-	-	-	+2 >0	+2 >0	

- coloanele x_3^{p2}, x_2^{p2} şi $B^{-1}\cdot b^{p2}$ se recalculează cu regula pivotului;

x_3^{p1}	x_2^{p1}	x_3^{p2}
1	0	$1 - \frac{0\cdot(-4)}{\boxed{5}} = 1$
0	1	$0 - \frac{1\cdot(-4)}{\boxed{5}} = 0{,}8$
-4	$\boxed{5}$	$-4 / \boxed{5} = -0{,}8$

x_5	x_2^{p1}	x_5^{p2}
0	0	$0-\frac{0\cdot 1}{\boxed{5}}=0$
0	1	$0-\frac{1\cdot 1}{\boxed{5}}=-0{,}2$
1	$\boxed{5}$	$1/\boxed{5}=0{,}2$

$B^{-1}\cdot b^{p1}$	x_2^{p1}	$B^{-1}\cdot b^{p2}$
50	0	$50-\frac{200\cdot 0}{\boxed{5}}=50$
50	1	$50-\frac{1\cdot 200}{\boxed{5}}=10$
200	$\boxed{5}$	$200/\boxed{5}=40$

- linia C_j se completează din matricea C, ținând cont de valorile lui $x_1 \div x_5$;
- linia Z_j se completează astfel: sub matricea unitate (coloanele x_1, x_4, x_2^{p1}) se trece „linie" → „-", iar sub coloanele x_3^{p2}, x_5^{p2} valorile se calculează astfel:

$$C_j \cdot x_3^{p2} = 10\cdot 1 + 0\cdot 0{,}8 + 10\cdot(-0{,}8) = 2$$

$$C_j \cdot x_5^{p2} = 10\cdot 0 + 0\cdot(-0{,}2) + 10\cdot 0{,}2 = 2$$

- se calculează apoi diferența Z_j-C_j, rezultând pe coloanele x_3^{p2} şi x_5^{p2} valorile +2 şi +2. Deoarece nu există o diferență (negativă) Z_j-C_j>0 **rezultă că s-a atins soluția optimă**;

Stabilirea soluției optime:

vector de bază

	x_1	x_4	x_2^{p1}	x_3^{p2}	x_5^{p2}	$B^{-1}\cdot b^{p2}$
	1	0	0	1	0	50
	0	1	0	0,8	-0,2	10
	0	0	1	-0,8	0,2	40
C_j	10	0	10	0	0	
Z_j	-	-	-	2	2	
Z_j-C_j	-	-	-	+2 >0	+2 >0	

$$x_1 = 50$$
$$x_4 = 10$$
$$x_2 = 40$$
$$x_3 = 0$$
$$x_5 = 0$$