PROGRAMAREA LINIARĂ

1. O centrală termoelectrică (CTE) are două grupuri de 50 MW. Primul grup are un consum specific de 0,3 tcc/MWh, iar cel de-al doilea de 0,4 tcc/MWh.

Pentru 9 ore de funcționare stocul de combustibil este 315 t, din care 300 t cărbune şi 15 t combustibil de suport. Pentru primul grup se foloseşte 5% combustibil suport iar pentru grupul al-II-lea se foloseşte 10% combustibil suport.

Ştiind că în perioada de funcționare primul grup nu poate funcționa 1 oră să se determine încărcarea fiecărui grup astfel încât cantitatea de energie produsă să fie maximă.

Notăm:

x_1 – încărcarea primului grup, [MW];

x_2 – încărcarea celui de-al doilea grup, [MW].

Forma canonică a problemei de programare liniară este:

$\max F(x_1, x_2) = 8 \cdot x_1 + 9 \cdot x_2$ - funcția de maximizare

$$\begin{cases} x_1 \le 50 \\ x_2 \le 50 \\ 0{,}3 \cdot 8 \cdot \dfrac{5}{100} \cdot x_1 + 0{,}4 \cdot 9 \cdot \dfrac{10}{100} \cdot x_2 \le 15 \\ 0{,}3 \cdot 8 \cdot \dfrac{95}{100} \cdot x_1 + 0{,}4 \cdot 9 \cdot \dfrac{90}{100} \cdot x_2 \le 300 \end{cases} \text{ - sistem de restricții}$$

$x_1 \ge 0; \quad x_2 \ge 0$

Trecerea de la ***forma canonică*** la ***forma standard*** se face prin adăugarea câte unei variabile suplimentare (de egalizare) pentru fiecare inecuație a sistemului de restricții.

În cazul nostru sistemul are trei inecuații, deci se vor introduce trei variabile de egalizare notate: x_3, x_4, x_5, x_6.

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 50 \\ x_2 + x_4 = 50 \\ 0{,}12 \cdot x_1 + 0{,}36 \cdot x_2 + x_5 = 15 \\ 2{,}28 \cdot x_1 + 3{,}24 \cdot x_2 + x_6 = 300 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0; \quad x_2 \ge 0; \quad x_3 \ge 0; \quad x_4 \ge 0; \quad x_5 \ge 0; \quad x_6 \ge 0$

Acest sistem se mai poate scrie:

$$\begin{cases} x_1 + 0 \cdot x_2 + x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 + 0 \cdot x_6 = 50 \\ 0 \cdot x_1 + x_2 + 0 \cdot x_3 + x_4 + 0 \cdot x_5 + +0 \cdot x_6 = 50 \\ 0{,}12 \cdot x_1 + 0{,}36 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + x_5 + 0 \cdot x_6 = 15 \\ 2{,}28 \cdot x_1 + 3{,}24 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 + x_6 = 300 \end{cases}$$

Din sistemul de ecuații se construiește matricea A și b:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0{,}12 & 0{,}36 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2{,}28 & 3{,}24 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \qquad b = \begin{bmatrix} 50 \\ 50 \\ 15 \\ 300 \end{bmatrix}$$

Funcția de maximizare devine:

$$\max F(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = 8 \cdot x_1 + 9 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 + 0 \cdot x_6$$

Se construiește matricea C:

$$C = \begin{bmatrix} 8 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Se trasează un tabel în care se trec pe coloane mai întâi variabile de egalizare (în cazul nostru x_3, x_4, x_5 și x_6) și apoi variabilele care trebuie determinate (cazul nostru x_1 și x_2), valorile fiind luate din matricea A.

vector de bază

Coloana care iese din vectorul de bază

Coloana care intră în vectorul de bază

pivot

La numitor se trece vectorul coloană care intră în bază (cazul nostru x_1)

	x_3	x_4	x_5	x_6	x_1	x_2	$B^{-1} \cdot b$	$\min \frac{B^{-1} \cdot b}{x_2}$
	1	0	0	0	1	0	50	50/0 = -
	0	1	0	0	0	1	50	50/1 = 50
	0	0	1	0	0,12	$\boxed{0{,}36}$	15	15/0,36 = 41,66
	0	0	0	1	2,28	3,24	300	300/3,24=92,59
C_j	0	0	0	0	8	9		
Z_j	-	-	-		0	0		
Z_j-C_j	-	-	-		-8	-9		
					<0	<0		

Completarea tabelului:

- coloanele x_3, x_4, x_5, x_6, x_1, x_2 se completează cu valorile din matricea A;
- linia C_j se completează cu valorile din matricea C;
- linia Z_j se completează astfel: sub matricea unitate (coloanele x_3, x_4, x_5, x_6) se trece „linie” → „-”, iar sub coloanele x_1, x_2 valorile se calculează astfel:

$$C_j \cdot x_1 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0{,}12 + 0 \cdot 2{,}28 = 0$$

$$C_j \cdot x_2 = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0{,}36 + 0 \cdot 3{,}24 = 0$$

- se calculează apoi diferența Z_j-C_j, rezultând pe coloanele x_1 și x_2 valorile –8 și –9. Deoarece există diferențe (negative) Z_j-C_j<0 **rezultă că soluția nu este optimă**;
- se caută maximul diferențelor negative $\max|Z_j - C_j|$ astfel:

$$\max|Z_j - C_j| = \max|-8, -9| = \max(8, 9) = 9$$

Valoarea 9 se găsește coloana x_2. **Deci rezultă că vectorul x_2 intră în bază**.

- pentru a determina vectorul care iese din bază se pune condiția:

$$\min\left\{\frac{B^{-1} \cdot b}{x_2}\right\} \Rightarrow \min\left\{\frac{50}{0}, \frac{50}{1}, \frac{15}{0{,}36}, \frac{300}{3{,}24}\right\} = \min\{-,\ 50,\ 41{,}66,\ 92{,}59\} = 41{,}66$$

Deoarece valoarea 41,66 se găseşte a treia linie, se caută pe această linie în vectorul de bază valoarea „1”. În cazul nostru cifra „1” am găsit-o pe coloana $x_{4â5}$, **rezultă că x_5 iese din bază**.

- se stabileşte pivotul care se găseşte la intersecţia dintre coloana care intră în vectorul de bază (x_2 în cazul nostru) şi linia pe care am găsit minimul $\min\left\{\frac{B^{-1}\cdot b}{x_2}\right\} = 41,66$ (a treia linie în cazul nostru).

  Se completează un nou tabel, astfel:
- x_2 şi x_4 îşi schimbă poziţiile între ele **dar nu şi valorile în vectorul de bază**;
- în vectorul de bază (sub x_3, x_2, x_5, x_6) se completează matricea unitate $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

	x_3	x_4	x_2	x_6	x_1^{p1}	x_5^{p1}	$B^{-1}\cdot b^{p1}$	$\min \frac{B^{-1}\cdot b^{p1}}{x_1}$
	1	0	0	0	$\boxed{1}$	0	50	50/1 = 50
	0	1	0	0	-0,33	-2,78	8,34	8,34/-0,33 = -
	0	0	1	0	0,33	2,78	41,67	41,67/0,33 = 126,27
	0	0	0	1	1,2	-9	165	165/1,2=137,5
C_j	0	0	9	0	8	0		
Z_j	-	-	-		3	25		
Z_j-C_j	-	-	-		-5	25		
					<0	>0		

- coloanele x_1^{p1}, x_5^{p1} şi $B^{-1}\cdot b^{p1}$ se recalculează cu regula pivotului;

x_1	x_2	x_1^{p1}
a = 1	d = 0	$a - \frac{d\cdot c}{f} = 1 - \frac{0\cdot 0,12}{\boxed{0,36}} = 1$
b = 0	e = 1	$b - \frac{e\cdot c}{f} = 0 - \frac{1\cdot 0,12}{\boxed{0,36}} = -0,33$
c = 0,12	f = $\boxed{0,36}$	c/f=0,12 / $\boxed{0,36}$ = 0,33 – pe linia cu pivotul elementul se împarte la pivot
g = 2,28	h = 3,24	$g - \frac{h\cdot c}{f} = 2,28 - \frac{3,24\cdot 0,12}{\boxed{0,36}} = 1,2$

x_5	x_2	x_5^{p1}
0	0	$0 - \frac{0\cdot 1}{\boxed{0,36}} = 0$
0	1	$0 - \frac{1\cdot 1}{\boxed{0,36}} = -2,78$
1	$\boxed{0,36}$	1 / $\boxed{0,36}$ = 2,78
0	3,24	$0 - \frac{3,24\cdot 1}{\boxed{0,36}} = -9$

$B^{-1}\cdot b$	x_2	$B^{-1}\cdot b^{p1}$
50	0	$50-\frac{0\cdot 15}{\boxed{0{,}36}}=50$
50	1	$50-\frac{1\cdot 15}{\boxed{0{,}36}}=8{,}34$
15	$\boxed{0{,}36}$	$15\ /\boxed{0{,}36}=41{,}67$
300	3,24	$300-\frac{3{,}24\cdot 15}{\boxed{0{,}36}}=165$

- linia C_j se completează din matricea C, ținând cont de valorile lui $x_1 \div x_6$;
- linia Z_j se completează astfel: sub matricea unitate (coloanele x_3, x_4, x_2, x_6) se trece „linie” → „-”, iar sub coloanele x_1^{p1}, x_5^{p1} valorile se calculează astfel:

$$C_j \cdot x_1^{p1} = 0\cdot 1 + 0\cdot(-0{,}33) + 9\cdot 0{,}33 + 0\cdot 1{,}2 = 3$$

$$C_j \cdot x_5^{p1} = 0\cdot 0 + 0\cdot(-2{,}78) + 9\cdot 2{,}78 + 0\cdot(-9) = 25$$

- se calculează apoi diferența Z_j-C_j, rezultând pe coloanele x_1^{p1} şi x_5^{p1} valorile -5 şi +25. Deoarece există o diferență (negativă) Z_j-C_j<0 **rezultă că soluția nu este optimă**;
- se caută maximul diferențelor negative $\max|Z_j - C_j|$ astfel:

$$\max|Z_j - C_j| = \max|-5| = \max(5) = 5$$

Deoarece valoarea +5 se găseşte pe coloana x_1^{p1} **rezultă că vectorul x_1^{p1} intră în bază**.

- pentru a determina vectorul care iese din bază se pune condiția:

$$\min\left\{\frac{B^{-1}\cdot b^{p1}}{x_1^{p1}}\right\} \Rightarrow \min\left\{\frac{50}{1}, \frac{8{,}34}{-0{,}33}, \frac{41{,}67}{0{,}33}, \frac{165}{1{,}2}\right\} = \min\{50,\ -,\ 126{,}27,\ 137{,}5\} = 50$$

Deoarece valoarea 50 se găseşte pe prima linie, se caută pe această linie în vectorul de bază valoarea „1”. În cazul nostru cifra „1” am găsit-o pe coloana x_3, rezultă că x_3 iese din vectorul bază.

- se stabileşte pivotul care se găseşte la intersecția dintre coloana care intră în vectorul de bază (x_1^{p1} în cazul nostru la acest pas) şi linia pe care am găsit minimul $\min\left\{\frac{B^{-1}\cdot b^{p1}}{x_1^{p1}}\right\} = 50$ (prima linie în cazul nostru la acest pas).

Se completează un nou tabel, astfel:

- x_3 şi x_1^{p1} îşi schimbă pozițiile între ele **dar nu şi valorile în vectorul de bază**;
- în vectorul de bază (sub x_1^{p1}, x_4, x_2, x_6) se completează matricea unitate

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

	x_1^{p1}	x_4	x_2	x_6	x_3^{p2}	x_5^{p2}	$B^{-1}\cdot b^{p2}$
	1	0	0	0	1	0	50
	0	1	0	0	0,33	-2,78	24,84
	0	0	1	0	-0,33	2,78	25,17
	0	0	0	1	-1,2	-9	105
C_j	8	0	9	0	0	0	
Z_j	-	-	-	-	5,03	25,02	
Z_j-C_j	-	-	-		5,03 >0	25,02 >0	

- coloanele x_3^{p2}, x_5^{p2} şi $B^{-1}\cdot b^{p2}$ se recalculează cu regula pivotului;

x_3^{p1}	x_1^{p1}	x_4^{p2}
1	$\boxed{1}$	$1/\boxed{1}=1$
0	-0,33	$0-\frac{(-0,33)\cdot 1}{\boxed{1}}=0,33$
0	0,33	$0-\frac{0,33\cdot 1}{\boxed{1}}=-0,33$
0	1,2	$0-\frac{1,2\cdot 1}{\boxed{1}}=1,2$

x_5^{p1}	x_1^{p1}	x_5^{p2}
0	$\boxed{1}$	$0/\boxed{1}=0$
-2,78	-0,33	$-2,78-\frac{(-0,33)\cdot 0}{\boxed{1}}=-2,78$
2,78	0,33	$2,78-\frac{0,33\cdot 0}{\boxed{1}}=2,78$
-9	1,2	$-9-\frac{1,2\cdot 0}{\boxed{1}}=-9$

$B^{-1}\cdot b^{p1}$	x_1^{p1}	$B^{-1}\cdot b^{p2}$
50	$\boxed{1}$	$50/\boxed{1}=50$
8,34	-0,33	$8,34-\frac{(-0,33)\cdot 50}{\boxed{1}}=24,84$
41,67	0,33	$41,67-\frac{0,33\cdot 50}{\boxed{1}}=25,17$
165	1,2	$165-\frac{1,2\cdot 50}{\boxed{1}}=105$

- linia C_j se completează din matricea C, ținând cont de valorile lui $x_1 \div x_5$;
- linia Z_j se completează astfel: sub matricea unitate (coloanele x_1^{p1}, x_4, x_2, x_6) se trece „linie” → „-”, iar sub coloanele x_3^{p2}, x_5^{p2} valorile se calculează astfel:

$$C_j \cdot x_3^{p2} = 8 \cdot 1 + 0 \cdot 0{,}33 + 9 \cdot (-0{,}33) + 0 \cdot 1{,}2 = 5{,}03$$

$$C_j \cdot x_5^{p2} = 8 \cdot 0 + 0 \cdot (-2{,}78) + 9 \cdot 2{,}78 + 0 \cdot (-9) = 25{,}02$$

- se calculează apoi diferenţa Z_j-C_j, rezultând pe coloanele x_3^{p2} şi x_5^{p2} valorile +5,03 şi +25,02. Deoarece nu există o diferenţă (negativă) Z_j-C_j>0 **rezultă că s-a atins soluţia optimă**;

$$x_1 = 50$$
$$x_4 = 24{,}84$$
$$x_2 = 25{,}17$$
$$x_6 = 105$$
$$x_3 = 0$$
$$x_5 = 0$$