# PROGRAMAREA LINIARĂ

1. Să se determine încărcarea optimă a două grupuri ale unei centrale termoelectrice cu puterile nominale de 100 şi 200 MW. Cele două grupuri utilizează cărbune.

Consumurile specifice sunt de 400 kgcc/MWh pentru primul grup şi 300 kgcc/MWh pentru cel de al doilea grup. Cantitatea de combustibil disponibil pentru o zi de funcţionare este de 2350 tcc. Criteriul de optimizare cere să se producă o cantitate cât mai mare de energie cu combustibilul disponibil.

Notăm:
$x_1$ – încărcarea primului grup, [MW];
$x_2$ – încărcarea celui de-al doilea grup, [MW].

***Forma canonică a problemei de programare liniară*** este:

$\max F(x_1, x_2) = 24 \cdot x_1 + 24 \cdot x_2$ - funcţia de optimizare

$$\begin{cases} x_1 \le 100 \\ x_2 \le 200 \\ 0{,}4 \cdot 24 \cdot x_1 + 0{,}3 \cdot 24 \cdot x_2 \le 2350 \ \text{ tcc} \end{cases} \quad \text{- sistem de restricţii}$$

$$x_1 \ge 0; \quad x_2 \ge 0$$

Trecerea de la ***forma canonică*** la ***forma standard*** se face prin adăugarea unei variabile suplimentare (de egalizare) pentru fiecare inecuaţie a sistemului de restricţii.

În cazul nostru sistemul are trei inecuaţii, deci se vor introduce trei variabile de egalizare notate: $x_3$, $x_4$, $x_5$.

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 100 \\ x_2 + x_4 = 200 \\ 9{,}6 \cdot x_1 + 7{,}2 \cdot x_2 + x_5 = 2350 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0; \quad x_2 \ge 0; \quad x_3 \ge 0; \quad x_4 \ge 0; \quad x_5 \ge 0$$

Acest sistem se mai poate scrie:

$$\begin{cases} x_1 + 0 \cdot x_2 + x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 = 100 \\ 0 \cdot x_1 + x_2 + 0 \cdot x_3 + x_4 + 0 \cdot x_5 = 200 \\ 9{,}6 \cdot x_1 + 7{,}2 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + x_5 = 2350 \end{cases}$$

Din sistemul de ecuaţii se construieşte matricea A şi b:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 9{,}6 & 7{,}2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \qquad b = \begin{bmatrix} 100 \\ 200 \\ 2350 \end{bmatrix}$$

Funcţia de maximizare devine:

$$\max F(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = 24 \cdot x_1 + 24 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5$$

Se construieşte matricea C:

$$C = \begin{bmatrix} 24 & 24 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Se trasează un tabel în care se trec pe coloane mai întâi variabilele de egalizare (în cazul nostru $x_3$, $x_4$ şi $x_5$) şi apoi variabilele care trebuie determinate (cazul nostru $x_1$ şi $x_2$), valorile fiind luate din matricea A.

Coloana care iese din vectorul de bază

Coloana care intră în vectorul de bază

vector de bază

pivot

La numitor se trece vectorul coloană care intră în bază (cazul nostru $x_1$)

| | **$x_3$** | **$x_4$** | **$x_5$** | **$x_1$** | **$x_2$** | **$B^{-1}\cdot b$** | **$\min \frac{B^{-1}\cdot b}{x_1}$** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 0 | 0 | $\boxed{1}$ | 0 | 100 | 100/1 = 100 |
| | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 200 | 200/0 = - |
| | 0 | 0 | 1 | 9,6 | 7,2 | 2350 | 2350/9,6 = 244.79 |
| $C_j$ | 0 | 0 | 0 | 24 | 24 | | |
| $Z_j$ | - | - | - | 0 | 0 | | |
| $Z_j$-$C_j$ | - | - | - | -24 <0 | -24 <0 | | |

Completarea tabelului:

- coloanele $x_3$, $x_4$, $x_5$, $x_1$, $x_2$ se completează cu valorile din matricea A;
- $B^{-1}\cdot b = b$;
- linia $C_j$ se completează cu valorile din matricea C;
- linia $Z_j$ se completează astfel: sub matricea unitate (coloanele $x_3$, $x_4$, $x_5$) se trece „linie” → „-”, iar sub coloanele $x_1$, $x_2$ valorile se calculează astfel:

$$C_j \cdot x_1 = 0\cdot 1 + 0\cdot 0 + 0\cdot 9{,}6 = 0$$

$$C_j \cdot x_2 = 0\cdot 0 + 0\cdot 1 + 0\cdot 7{,}2 = 0$$

- se calculează apoi diferenţa $Z_j$-$C_j$, rezultând pe coloanele $x_1$ şi $x_2$ valorile –24 şi –24. Deoarece există diferențe (negative) $Z_j$-$C_j$<0 **rezultă că soluția nu este optimă**;
- se caută maximul diferențelor negative $\max|Z_j - C_j|$ astfel:

$$\max|Z_j - C_j| = \max|-24, -24| = \max(24, 24) = 24$$

Valoarea 24 se găseşte pe coloana $x_1$ şi pe coloana $x_2$. *Deoarece valorile sunt egale se alege una din variabilele $x_1$ sau $x_2$.* **Alegem vectorul $x_1$, deci rezultă că vectorul $x_1$ intră în bază**.

- pentru a determina vectorul care iese din bază se pune condiția:

$$\min\left\{\frac{B^{-1}\cdot b}{x_1}\right\} \Rightarrow \min\left\{\frac{100}{1}, \frac{200}{0}, \frac{2350}{9{,}6}\right\} = \min\{100,\ -,\ 244.79\} = 100$$

Deoarece valoarea 100 se găseşte pe prima linie, se caută pe această linie în vectorul de bază valoarea „1”. În cazul nostru cifra „1” am găsit-o pe coloana $x_3$, rezultă că $x_3$ iese din bază.

- se stabileşte pivotul care se găseşte la intersecția dintre coloana care intră în vectorul de bază ($x_1$ în cazul nostru) şi linia pe care am găsit minimul $\min\left\{\frac{B^{-1}\cdot b}{x_1}\right\} = 100$ (prima linie în cazul nostru).

***Se completează un nou tabel***, astfel:

- $x_1$ şi $x_3$ îşi schimbă poziţiile între ele **dar nu şi valorile**;
- în vectorul de bază (sub $x_1$, $x_4$, $x_5$) se completează matricea unitate $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

| | $\mathbf{x_1}$ | $\mathbf{x_4}$ | $\mathbf{x_5}$ | $\mathbf{x_3^{p1}}$ | $\mathbf{x_2^{p1}}$ | $\mathbf{B^{-1} \cdot b^{p1}}$ | $\mathbf{\min \frac{B^{-1} \cdot b^{p1}}{x_2}}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 100 | 100/0 = - |
| | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 200 | 200/1 = 200 |
| | 0 | 0 | 1 | -9,6 | $\boxed{7,2}$ | 1390 | 1390/7,2 = 193,05 |
| $C_j$ | 24 | 0 | 0 | 0 | 24 | | |
| $Z_j$ | - | - | - | 24 | 0 | | |
| $Z_j$-$C_j$ | - | - | - | +24 | -24 | | |
| | | | | >0 | <0 | | |

- coloanele $x_3^{p1}, x_2^{p1}$ şi $B^{-1} \cdot b^{p1}$ se recalculează cu regula pivotului;

| $x_3$ | $x_1$ | $x_3^{p1}$ |
|---|---|---|
| a = 1 | d = $\boxed{1}$ | a/d=1 / $\boxed{1}$ = 1 – pe linia cu pivotul elementul se împarte la pivot |
| b = 0 | e = 0 | $b - \frac{e \cdot a}{d} = 0 - \frac{0 \cdot 1}{\boxed{1}} = 0$ |
| c = 0 | f = 9,6 | $c - \frac{f \cdot a}{d} = 0 - \frac{9,6 \cdot 1}{\boxed{1}} = -9,6$ |

| $x_2$ | $x_1$ | $x_2^{p1}$ |
|---|---|---|
| 0 | $\boxed{1}$ | 0 / $\boxed{1}$ = 0 |
| 1 | 0 | $1 - \frac{0 \cdot 0}{\boxed{1}} = 1$ |
| 7,2 | 9,6 | $7,2 - \frac{9,6 \cdot 0}{\boxed{1}} = 7,2$ |

| $B^{-1} \cdot b$ | $x_1$ | $B^{-1} \cdot b^{p1}$ |
|---|---|---|
| 100 | $\boxed{1}$ | 100 / $\boxed{1}$ = 100 |
| 200 | 0 | $200 - \frac{0 \cdot 100}{\boxed{1}} = 200$ |
| 2350 | 9,6 | $2350 - \frac{100 \cdot 9,6}{\boxed{1}} = 1390$ |

- linia $C_j$ se completează din matricea C, ţinând cont de valorile lui $x_1 \div x_5$;

- linia $Z_j$ se completează astfel: sub matricea unitate (coloanele $x_1$, $x_4$, $x_5$) se trece „linie” → „-”, iar sub coloanele $x_3^{p1}$, $x_2^{p1}$ valorile se calculează astfel:

$$C_j \cdot x_3^{p1} = 24 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot (-9{,}6) = 24$$

$$C_j \cdot x_2^{p1} = 24 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 7{,}2 = 0$$

- se calculează apoi diferența $Z_j$-$C_j$, rezultând pe coloanele $x_3^{p1}$ şi $x_2^{p1}$ valorile +24 şi –24. Deoarece există o diferență (negativă) $Z_j$-$C_j$<0 **rezultă că soluția nu este optimă**;
- se caută maximul diferențelor negative $\max\left|Z_j - C_j\right|$ astfel:

$$\max\left|Z_j - C_j\right| = \max\left|-24\right| = \max(\ 24) = 24$$

Deoarece valoarea +24 se găseşte pe coloana $x_2^{p1}$ **rezultă că vectorul $\mathbf{x_2^{p1}}$ intră în bază**.

- pentru a determina vectorul care iese din bază se pune condiția:

$$\min\left\{\frac{B^{-1} \cdot b^{p1}}{x_2^{p1}}\right\} \Rightarrow \min\left\{\frac{100}{0}, \frac{200}{1}, \frac{1390}{7{,}2}\right\} = \min\{-,\ 200,\ 193{,}05\} = 193{,}05$$

Deoarece valoarea 193,05 se găseşte pe a treia linie, se caută pe această linie în vectorul de bază valoarea „1”. În cazul nostru cifra „1” am găsit-o pe coloana $x_5$, rezultă că $x_5$ iese din bază.

- se stabileşte pivotul care se găseşte la intersecția dintre coloana care intră în vectorul de bază ($x_2^{p1}$ în cazul nostru la acest pas) şi linia pe care am găsit minimul $\min\left\{\frac{B^{-1} \cdot b^{p1}}{x_2^{p1}}\right\} = 193{,}05$ (a treia linie în cazul nostru la acest pas).

***Se completează un nou tabel***, astfel:

- $x_5$ şi $x_2$ îşi schimbă pozițiile între ele **dar nu şi valorile**;
- în vectorul de bază (sub $x_1$, $x_4$, $x_2^{p1}$) se completează matricea unitate $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

| | $\mathbf{x_1}$ | $\mathbf{x_4}$ | $\mathbf{x_2^{p1}}$ | $\mathbf{x_3^{p2}}$ | $\mathbf{x_5^{p2}}$ | $\mathbf{B^{-1} \cdot b^{p2}}$ | $\min \frac{B^{-1} \cdot b^{p1}}{x_3^{p2}}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 100 | 100/1 = 100 |
| | 0 | 1 | 0 | $\boxed{1{,}33}$ | -0,138 | 6,94 | 6,94/1,33 = 5,21 |
| | 0 | 0 | 1 | -1,33 | 0,138 | 193,05 | 193,05/(-1,33) = - |
| $C_j$ | 24 | 0 | 24 | 0 | 0 | | |
| $Z_j$ | - | - | - | - 7,92 | 3,31 | | |
| $Z_j$-$C_j$ | - | - | - | -7,92<br><0 | +3,31<br>>0 | | |

- coloanele $x_3^{p2}, x_2^{p2}$ şi $B^{-1} \cdot b^{p2}$ se recalculează cu regula pivotului;

| $x_3^{p1}$ | $x_2^{p1}$ | $x_3^{p2}$ |
|---|---|---|
| 1 | 0 | $1-\frac{0\cdot(-9{,}6)}{\boxed{7{,}2}}=1$ |
| 0 | 1 | $0-\frac{1\cdot(-9{,}6)}{\boxed{7{,}2}}=1{,}33$ |
| -9,6 | $\boxed{7{,}2}$ | -9,6 / $\boxed{7{,}2}$= -- 1,33 |

| $x_5$ | $x_2^{p1}$ | $x_5^{p2}$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | $0-\frac{0\cdot 1}{\boxed{7{,}2}}=0$ |
| 0 | 1 | $0-\frac{1\cdot 1}{\boxed{7{,}2}}=-0{,}138$ |
| 1 | $\boxed{7{,}2}$ | 1 / $\boxed{7{,}2}$= 0,138 |

| $B^{-1}\cdot b^{p1}$ | $x_2^{p1}$ | $B^{-1}\cdot b^{p2}$ |
|---|---|---|
| 100 | 0 | $100-\frac{1390\cdot 0}{\boxed{7{,}2}}=100$ |
| 200 | 1 | $200-\frac{1\cdot 1390}{\boxed{7{,}2}}=6{,}94$ |
| 1390 | $\boxed{7{,}2}$ | 1390 / $\boxed{7{,}2}$= 193,05 |

- linia $C_j$ se completează din matricea C, ținând cont de valorile lui $x_1 \div x_5$;
- linia $Z_j$ se completează astfel: sub matricea unitate (coloanele $x_1$, $x_4$, $x_2^{p1}$) se trece „linie” → „-”, iar sub coloanele $x_3^{p2}$, $x_5^{p2}$ valorile se calculează astfel:

$$C_j\cdot x_3^{p2}=24\cdot 1+0\cdot 1{,}33+24\cdot(-1{,}33)=-7{,}92$$

$$C_j\cdot x_5^{p2}=24\cdot 0+0\cdot(-0{,}138)+24\cdot 0{,}138=3{,}31$$

- se calculează apoi diferența $Z_j$-$C_j$, rezultând pe coloanele $x_3^{p2}$şi $x_5^{p2}$ valorile –7,92 şi +3,31. Deoarece există o diferență (negativă) $Z_j$-$C_j$<0 **rezultă că s-a soluția nu este optimă**;
- se caută maximul diferențelor negative $\max|Z_j-C_j|$ astfel:

$$\max|Z_j-C_j|=\max|-7{,}92|=\max(\,7{,}92)=7{,}92$$

Deoarece valoarea +7.92 se găseşte pe coloana $x_3^{p2}$ **rezultă că vectorul** $x_3^{p2}$ **intră în bază**.

- pentru a determina vectorul care iese din bază se pune condiția:

$$\min\left\{\frac{B^{-1}\cdot b^{p1}}{x_3^{p2}}\right\}\Rightarrow\min\left\{\frac{100}{1},\frac{6{,}94}{1{,}33},\frac{193{,}05}{(-1{,}33)}\right\}=\min\{100,\;5{,}21,\;-\}=5{,}21$$

Deoarece valoarea 5,21 se găseşte pe a doua linie, se caută pe această linie în vectorul de bază valoarea „1”. În cazul nostru cifra „1” am găsit-o pe coloana $x_4$, rezultă că $x_4$ iese din bază.

- se stabileşte pivotul care se găseşte la intersecţia dintre coloana care intră în vectorul de bază ($x_3^{p2}$ în cazul nostru la acest pas) şi linia pe care am găsit minimul $\min\left\{\frac{B^{-1}\cdot b^{p1}}{x_3^{p2}}\right\}=5{,}21$ (a doua linie în cazul nostru la acest pas).

***Se completează un nou tabel***, astfel:

- $x_4$ şi $x_3^{p2}$ îşi schimbă poziţiile între ele **dar nu şi valorile**;
- în vectorul de bază (sub $x_1$, $x_3^{p2}$, $x_2^{p1}$) se completează matricea unitate $I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$;

| | $\mathbf{x_1}$ | $\mathbf{x_3^{p2}}$ | $\mathbf{x_2^{p1}}$ | $x_4^{p3}$ | $x_5^{p3}$ | $B^{-1}\cdot b^{p3}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 0 | 0 | -0,75 | 0,10 | 94,78 |
| | 0 | 1 | 0 | 0,75 | -0,10 | 5,21 |
| | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 199,99 |
| $C_j$ | 24 | 0 | 24 | 0 | 0 | |
| $Z_j$ | - | - | - | 6 | 2,4 | |
| $Z_j$-$C_j$ | - | - | - | 6<br>>0 | 2,4<br>>0 | |

- coloanele $x_4^{p3}, x_5^{p3}$ şi $B^{-1}\cdot b^{p3}$ se recalculează cu regula pivotului;

| $x_4$ | $x_3^{p2}$ | $x_4^{p3}$ |
|---|---|---|
| 0 | 1 | $0-\frac{1\cdot 1}{\boxed{1{,}33}}=-0{,}75$ |
| 1 | $\boxed{1{,}33}$ | $1/\boxed{1{,}33}=0{,}75$ |
| 0 | -1,33 | $0-\frac{1\cdot(-1{,}33)}{\boxed{1{,}33}}=1$ |

| $\mathbf{x_5^{p2}}$ | $x_3^{p2}$ | $x_4^{p3}$ |
|---|---|---|
| 0 | 1 | $0-\frac{1\cdot(-0{,}138)}{\boxed{1{,}33}}=0{,}10$ |
| -0,138 | $\boxed{1{,}33}$ | $(-0{,}138)/\boxed{1{,}33}=-0{,}10$ |
| 0,138 | -1,33 | $0{,}138-\frac{(-0{,}138)\cdot(-1{,}33)}{\boxed{1{,}33}}=0$ |

| $\mathbf{B^{-1} \cdot b^{p2}}$ | $x_3^{p2}$ | $B^{-1} \cdot b^{p3}$ |
|---|---|---|
| 100 | 1 | $100 - \frac{1 \cdot 6{,}94}{\boxed{1{,}33}} = 94{,}78$ |
| 6,94 | $\boxed{1{,}33}$ | $6{,}94 / \boxed{1{,}33} = 5{,}21$ |
| 193,05 | -1,33 | $193{,}05 - \frac{6{,}94 \cdot (-1{,}33)}{\boxed{1{,}33}} = 199{,}99$ |

- linia $C_j$ se completează din matricea C, ținând cont de valorile lui $x_1 \div x_5$;
- linia $Z_j$ se completează astfel: sub matricea unitate (coloanele $x_1$, $\mathbf{x_3^{p2}}$, $x_2^{p1}$) se trece „linie” → „-”, iar sub coloanele $x_4^{p3}$, $x_5^{p3}$ valorile se calculează astfel:

$$C_j \cdot x_4^{p3} = 24 \cdot (-0{,}75) + 0 \cdot 0{,}75 + 24 \cdot 1 = 6$$

$$C_j \cdot x_5^{p3} = 24 \cdot 0{,}10 + 0 \cdot (-0{,}10) + 24 \cdot 0 = 2{,}4$$

- se calculează apoi diferența $Z_j$-$C_j$, rezultând pe coloanele $x_4^{p3}$și $x_5^{p3}$ valorile 6 şi 2,4. Deoarece nu există o diferență (negativă) $Z_j$-$C_j$>0 **rezultă că s-a atins soluția optimă**;

Stabilirea soluției optime:

vector de bază

| | $\mathbf{x_1}$ | $\mathbf{x_3^{p2}}$ | $\mathbf{x_2^{p1}}$ | $x_4^{p3}$ | $x_5^{p3}$ | $B^{-1} \cdot b^{p3}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 0 | 0 | -0,75 | 0,10 | 94,78 |
| | 0 | 1 | 0 | 0,75 | -0,10 | 5,21 |
| | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 199,99 |
| $C_j$ | 24 | 0 | 24 | 0 | 0 | |
| $Z_j$ | - | - | - | 6 | 2,4 | |
| $Z_j$-$C_j$ | - | - | - | 6 | 2,4 | |
| | | | | >0 | >0 | |

$$x_1 = 94{,}78$$
$$x_2 = 199{,}99$$
$$x_3 = 5{,}21$$
$$x_4 = 0$$
$$x_5 = 0$$