METODE DE OPTIMIZARE DE ORDINUL 0, I ŞI II

1. Să se găsească:

$$\min\left(150\cdot x_1^2+100\cdot x_2^2-50\cdot x_1-25\cdot x_2+10\right)$$

cu $x_1\in R$, $x_2\in R$ utilizând:

a. metoda optimizării ciclice de-a lungul axelor de coordonate (metodă de ordinul 0);
b. metoda direcțiilor conjugate (metodă de ordinul 0);
c. metoda gradienților conjugați (metodă de ordinul I);
d. metoda Newton (metodă de ordinul II).

Deoarece în cadrul optimizării apar derivate de ordinul I şi ordinul al-II-lea termenul liber poate fi neglijat, astfel încât problema de optimizare devine:

$$\min\left(150\cdot x_1^2+100\cdot x_2^2-50\cdot x_1-25\cdot x_2\right)$$

Indiferent de metoda de optimizare utilizată pentru acest tip de problemă se calculează:

- gradientul funcției (derivata de ordinul I):

$$g=\nabla F=\begin{bmatrix}\frac{\partial F(x)}{\partial x_1}\\ \frac{\partial F(x)}{\partial x_2}\\ \vdots\\ \frac{\partial F(x)}{\partial x_n}\end{bmatrix} \tag{9.1}$$

În cazul nostru deoarece avem în problema de optimizare doar x_1 şi x_2, relația 9.1 devine:

$$g=\nabla F=\begin{bmatrix}\frac{\partial F(x)}{\partial x_1}\\ \frac{\partial F(x)}{\partial x_2}\end{bmatrix}$$

Formule derivate:

$\left(x^n\right)'=n\cdot x^{n-1}$; $(ct\cdot x)'=ct$; $(ct)'=0$

$$g=\nabla F=\begin{bmatrix}\frac{\partial F(x)}{\partial x_1}\\ \frac{\partial F(x)}{\partial x_2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\partial\left(\left(150\cdot x_1^2+100\cdot x_2^2-50\cdot x_1-25\cdot x_2\right)\right)}{\partial x_1}\\ \frac{\partial\left(\left(150\cdot x_1^2+100\cdot x_2^2-50\cdot x_1-25\cdot x_2\right)\right)}{\partial x_2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}300\cdot x_1-50\\ 200\cdot x_2-25\end{bmatrix}$$

- Hessian-ul (derivata de ordinul al-II-lea):

$$H(x)=\begin{bmatrix}\frac{\partial F(x)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial F(x)}{\partial x_2\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F(x)}{\partial x_n\partial x_1}\\ \frac{\partial F(x)}{\partial x_1\partial x_2} & \frac{\partial F(x)}{\partial x_2^2} & & \frac{\partial F(x)}{\partial x_n\partial x_2}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{\partial F(x)}{\partial x_1\partial x_n} & \frac{\partial F(x)}{\partial x_2\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial F(x)}{\partial x_n^2}\end{bmatrix} \tag{9.2}$$

În cazul nostru deoarece avem în problema de optimizare doar x_1 şi x_2, relația 8.2 devine:

$$H(x)=\begin{bmatrix}\frac{\partial F(x)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial F(x)}{\partial x_2 \partial x_1}\\ \frac{\partial F(x)}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial F(x)}{\partial x_2^2}\end{bmatrix}$$

Completarea matricei Hessian:

$$\frac{\partial F(x)}{\partial x_1^2}=\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial F(x)}{\partial x_1}\right)=\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial(150\cdot x_1^2+100\cdot x_2^2-50\cdot x_1-25\cdot x_2)}{\partial x_1}\right)=\frac{\partial(300\cdot x_1-50)}{\partial x_1}=300$$

$$\frac{\partial F(x)}{\partial x_2 \partial x_1}=\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial F(x)}{\partial x_1}\right)=\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial(150\cdot x_1^2+100\cdot x_2^2-50\cdot x_1-25\cdot x_2)}{\partial x_1}\right)=\frac{\partial(300\cdot x_1-50)}{\partial x_2}=0$$

$$H(x)=\begin{bmatrix}\frac{\partial F(x)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial F(x)}{\partial x_2 \partial x_1}\\ \frac{\partial F(x)}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial F(x)}{\partial x_2^2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}300 & 0\\ 0 & 200\end{bmatrix}$$

a. Metoda optimizării ciclice de-a lungul axelor de coordonate (metodă de ordinul 0)

a.1. Se alege un $x^{(0)}$ (x la pasul zero) arbitrar $x^{(0)}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$

a.2. Se calculează $g^{(0)}$ înlocuind valorile x_1 şi x_2 (din matricea anterioară) în matricea $g=\nabla F$

$$g^{(0)}=\nabla F=\begin{bmatrix}300\cdot x_1-50\\200\cdot x_2-25\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}300\cdot 0-50\\200\cdot 0-25\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-50\\-25\end{bmatrix}$$

a.3. Se alege prima direcție de-a lungul primei axe de coordonate: $d^{(0)}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$

a.4. Se calculează pasul de deplasare:

$$\lambda^{(k)}=-\frac{\left(g^{(k)},d^{(k)}\right)}{\left(d^{(k)},H\cdot d^{(k)}\right)}$$

În cazul nostru:

$$\lambda^{(0)}=-\frac{\left(g^{(0)},d^{(0)}\right)}{\left(d^{(0)},H\cdot d^{(0)}\right)}=-\frac{\left(\begin{bmatrix}-50\\-25\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right)}{\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}300 & 0\\0 & 200\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right)}=-\frac{\left(\begin{bmatrix}-50\\-25\end{bmatrix}\cdot[1\quad 0]\right)}{\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}300\\0\end{bmatrix}\right)}=-\frac{-50}{\left([1\quad 0]\cdot\begin{bmatrix}300\\0\end{bmatrix}\right)}=-\frac{-50}{300}=0{,}167$$

a.5. Se calculează: $x^{(k+1)}=x^{(k)}+\lambda^{(k)}\cdot d^{(k)}$

$$x^{(1)}=x^{(0)}+\lambda^{(0)}\cdot d^{(0)}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}+0{,}167\cdot\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0{,}167\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0{,}167\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$$

a.6. Se calculează g la pasul următor prin înlocuirea noilor valori x_1 şi x_2 în matricea $g=\nabla F$. Se verifică dacă matricea g la pasul următor este zero. Dacă este zero metoda se opreşte, deci s-au atins soluțiile optime.

Dacă nu este zero se alege următoarea direcție de deplasare şi se reiau paşii a.4÷a.6.

În cazul nostru g la pasul următor este $g^{(1)}$. Înlocuim noile valori x_1 şi x_2 (x_1=0,167; x_2=0) în matricea $g = \nabla F$.

$$g^{(1)} = \nabla F = \begin{bmatrix} 300 \cdot x_1 - 50 \\ 200 \cdot x_2 - 25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 300 \cdot 0{,}167 - 50 \\ 200 \cdot 0 - 25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -25 \end{bmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{nu s-a atins soluția optimă}$$

Următoarea direcție (de-a lungul celei de-a doua axe de coordonate) este: $d^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\lambda^{(1)} = -\frac{\left(g^{(1)}, d^{(1)}\right)}{\left(d^{(1)}, H \cdot d^{(1)}\right)} = -\frac{\left(\begin{bmatrix} 0 \\ -25 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)}{\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 300 & 0 \\ 0 & 200 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)} = -\frac{\left(\begin{bmatrix} 0 \\ -25 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}\right)}{\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 200 \end{bmatrix}\right)} = -\frac{-25}{\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 200 \end{bmatrix}\right)} = -\frac{-25}{200} = 0{,}125$$

$$x^{(2)} = x^{(1)} + \lambda^{(1)} \cdot d^{(1)} = \begin{bmatrix} 0{,}167 \\ 0 \end{bmatrix} + 0{,}125 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}167 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0{,}125 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}167 \\ 0{,}125 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$g^{(2)} = \nabla F = \begin{bmatrix} 300 \cdot x_1 - 50 \\ 200 \cdot x_2 - 25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 300 \cdot 0{,}167 - 50 \\ 200 \cdot 0{,}125 - 25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \textbf{s-a atins soluția optimă}$$

Soluția optimă este:

$$x_1 = 0{,}167$$
$$x_2 = 0{,}125$$

b. Metoda direcțiilor conjugate (metodă de ordinul 0)

b.1. Se alege un $x^{(0)}$ (x la pasul zero) arbitrar $x^{(0)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

b.2. Se calculează $g^{(0)}$ înlocuind valorile x_1 şi x_2 (din matricea anterioară) în matricea $g = \nabla F$

$$g^{(0)} = \nabla F = \begin{bmatrix} 300 \cdot x_1 - 50 \\ 200 \cdot x_2 - 25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 300 \cdot 2 - 50 \\ 200 \cdot 3 - 25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 550 \\ 575 \end{bmatrix} \neq 0$$

b.3. Se alege prima direcție: $d^{(0)} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$ dar cu $\left\| d^{(0)} \right\| = 1$ adică $\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1$

b.4. Se calculează pasul de deplasare:

$$\lambda^{(k)} = -\frac{\left(g^{(k)}, d^{(k)}\right)}{\left(d^{(k)}, H \cdot d^{(k)}\right)}$$

$$\lambda^{(0)} = -\frac{\left(g^{(0)}, d^{(0)}\right)}{\left(d^{(0)}, H \cdot d^{(0)}\right)} = -\frac{\left(\begin{bmatrix} 550 \\ 575 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}\right)}{\left(\begin{bmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 300 & 0 \\ 0 & 200 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}\right)} = -\frac{\left(\begin{bmatrix} 550 \\ 575 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}\right)}{\left(\begin{bmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 150 \\ 173{,}2 \end{bmatrix}\right)} = -\frac{-50}{\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 300 \\ 0 \end{bmatrix}\right)}$$

$$\lambda^{(0)} = -\frac{275 + 497{,}96}{\left(\begin{bmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 150 \\ 173{,}2 \end{bmatrix}\right)} = -\frac{772{,}96}{75 + 149{,}99} = -3{,}435$$

b.5. Se calculează: $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \lambda^{(k)} \cdot d^{(k)}$

$$x^{(1)} = x^{(0)} + \lambda^{(0)} \cdot d^{(0)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + (-3{,}435) \cdot \begin{bmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1{,}717 \\ -2{,}974 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}282 \\ 0{,}025 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

b.6. Se calculează g la pasul următor prin înlocuirea noilor valori x_1 şi x_2 în matricea $g = \nabla F$. Se verifică dacă matricea g la pasul următor este zero. Dacă este zero metoda se opreşte, deci s-au atins soluțiile optime.

Dacă nu este zero se **calculează** următoarea direcție de deplasare şi se reiau paşii b.4÷b.6.

În cazul nostru g la pasul următor este $g^{(1)}$. Înlocuim noile valori x_1 şi x_2 (x_1=0,282; x_2=0,025) în matricea $g = \nabla F$.

$$g^{(1)} = \nabla F = \begin{bmatrix} 300 \cdot x_1 - 50 \\ 200 \cdot x_2 - 25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 300 \cdot 0{,}282 - 50 \\ 200 \cdot 0{,}025 - 25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 34{,}9 \\ -19{,}8 \end{bmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{nu s-a atins soluția optimă}$$

Următoarea direcție de deplasare se calculează.

$$d^{(1)} = \begin{bmatrix} d_1^{(1)} \\ d_2^{(1)} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \left(d^{(1)}, H \cdot d^{(0)}\right) = 0 \\ \left\| d^{(1)} \right\| = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(\begin{bmatrix} d_1^{(1)} \\ d_2^{(1)} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 300 & 0 \\ 0 & 200 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \right) = 0 \\ \left(d_1^{(1)}\right)^2 + \left(d_2^{(1)}\right)^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(\begin{bmatrix} d_1^{(1)} \\ d_2^{(1)} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 150 \\ 173{,}2 \end{bmatrix} \right) = 0 \\ \left(d_1^{(1)}\right)^2 + \left(d_2^{(1)}\right)^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{bmatrix} d_1^{(1)} \\ d_2^{(1)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 150 & 173{,}2 \end{bmatrix} = 0 \\ \left(d_1^{(1)}\right)^2 + \left(d_2^{(1)}\right)^2 = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 150 \cdot d_1^{(1)} + 173{,}2 \cdot d_2^{(1)} = 0 \\ \left(d_1^{(1)}\right)^2 + \left(d_2^{(1)}\right)^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d_1^{(1)} = -\dfrac{173{,}2 \cdot d_2^{(1)}}{150} = -1{,}154 \cdot d_2^{(1)} \\ \left(d_1^{(1)}\right)^2 + \left(d_2^{(1)}\right)^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d_1^{(1)} = -1{,}154 \cdot d_2^{(1)} \\ \left(-1{,}154 \cdot d_2^{(1)}\right)^2 + \left(d_2^{(1)}\right)^2 = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} d_1^{(1)} = -1{,}154 \cdot d_2^{(1)} \\ 1{,}331 \cdot \left(d_2^{(1)}\right)^2 + \left(d_2^{(1)}\right)^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d_1^{(1)} = -1{,}154 \cdot d_2^{(1)} \\ 2{,}331 \cdot \left(d_2^{(1)}\right)^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d_1^{(1)} = -1{,}154 \cdot d_2^{(1)} \\ d_2^{(1)} = \sqrt{\dfrac{1}{2{,}331}} = 0{,}655 \end{cases} = \begin{cases} d_1^{(1)} = -1{,}154 \cdot 0{,}655 = -0{,}756 \\ d_2^{(1)} = 0{,}655 \end{cases}$$

$$d^{(1)} = \begin{bmatrix} d_1^{(1)} \\ d_2^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}756 \\ 0{,}655 \end{bmatrix}$$

$$\lambda^{(1)} = -\frac{\left(g^{(1)}, d^{(1)}\right)}{\left(d^{(1)}, H \cdot d^{(1)}\right)} = -\frac{\left(\begin{bmatrix} 34{,}9 \\ -19{,}8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -0{,}756 \\ 0{,}655 \end{bmatrix} \right)}{\left(\begin{bmatrix} -0{,}756 \\ 0{,}655 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 300 & 0 \\ 0 & 200 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -0{,}756 \\ 0{,}655 \end{bmatrix} \right)} = -\frac{\left(\begin{bmatrix} 34{,}9 \\ -19{,}8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -0{,}756 & 0{,}655 \end{bmatrix} \right)}{\left(\begin{bmatrix} -0{,}756 \\ 0{,}655 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -226{,}8 \\ 131 \end{bmatrix} \right)}$$

$$\lambda^{(1)} = -\frac{-26{,}384 - 12{,}969}{\left(\begin{bmatrix} -0{,}756 & 0{,}655 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -226{,}8 \\ 131 \end{bmatrix} \right)} = -\frac{-39{,}353}{171{,}46 + 85{,}805} = 0{,}153$$

$$x^{(2)} = x^{(1)} + \lambda^{(1)} \cdot d^{(1)} = \begin{bmatrix} 0{,}282 \\ 0{,}025 \end{bmatrix} + 0{,}153 \cdot \begin{bmatrix} -0{,}756 \\ 0{,}655 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}282 \\ 0{,}025 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0{,}115 \\ 0{,}100 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}167 \\ 0{,}125 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$g^{(2)} = \nabla F = \begin{bmatrix} 300 \cdot x_1 - 50 \\ 200 \cdot x_2 - 25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 300 \cdot 0{,}167 - 50 \\ 200 \cdot 0{,}125 - 25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \textbf{s-a atins soluția optimă}$$

Soluția optimă este:

$$x_1 = 0{,}167$$
$$x_2 = 0{,}125$$

Direcțiile conjugate

$d^{(0)} \rightarrow$ se aleg arbitrar dar cu $\left\| d^{(0)} \right\| = 1$

$d^{(1)} \rightarrow$ se calculează: $\begin{cases} d^{(1)}, H \cdot d^{(0)} = 0 \\ \left\| d^{(1)} \right\| = 1 \end{cases}$

$d^{(2)} \rightarrow$ se calculează: $\begin{cases} d^{(2)}, H \cdot d^{(0)} = 0 \\ d^{(2)}, H \cdot d^{(1)} = 0 \\ \left\| d^{(2)} \right\| = 1 \end{cases}$

$d^{(n)} \rightarrow$ se calculează: $\begin{cases} d^{(n)}, H \cdot d^{(0)} = 0 \\ d^{(n)}, H \cdot d^{(1)} = 0 \\ \cdots \\ d^{(n)}, H \cdot d^{(n-1)} = 0 \\ \left\| d^{(n)} \right\| = 1 \end{cases}$

c. Metoda gradienților conjugați (metodă de ordinul I)

c.1. Se alege un $x^{(0)}$ (x la pasul zero) arbitrar $x^{(0)} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

c.2. Se calculează $g^{(0)}$ înlocuind valorile x_1 şi x_2 (din matricea anterioară) în matricea $g = \nabla F$

$$g^{(0)} = \nabla F = \begin{bmatrix} 300 \cdot x_1 - 50 \\ 200 \cdot x_2 - 25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 300 \cdot 2 - 50 \\ 200 \cdot (-1) - 25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 550 \\ -225 \end{bmatrix}$$

c.3. Se calculează direcția curentă cu relația:

$$d^{(k)} = -g^{(k)} + \beta^{(k)} \cdot d^{(k-1)}, \text{ unde: } \beta^{(k)} = \frac{\left(g^{(k)}, g^{(k)}\right)}{\left(g^{(k-1)}, g^{(k-1)}\right)}$$

La pasul zero: $d^{(0)} = -g^{(0)} = \begin{bmatrix} -550 \\ 225 \end{bmatrix}$

c.4. Se calculează pasul de deplasare:

$$\lambda^{(k)} = -\frac{\left(g^{(k)}, d^{(k)}\right)}{\left(d^{(k)}, H \cdot d^{(k)}\right)}$$

În cazul nostru:

$$\lambda^{(0)} = -\frac{\left(g^{(0)}, d^{(0)}\right)}{\left(d^{(0)}, H\cdot d^{(0)}\right)} = -\frac{\left(\begin{bmatrix}550\\-225\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-550\\225\end{bmatrix}\right)}{\left(\begin{bmatrix}-550\\225\end{bmatrix},\begin{bmatrix}300 & 0\\0 & 200\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-550\\225\end{bmatrix}\right)} = -\frac{\left(\begin{bmatrix}550\\-225\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-550 & 225\end{bmatrix}\right)}{\left(\begin{bmatrix}-550\\225\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-165000\\45000\end{bmatrix}\right)} =$$

$$\lambda^{(0)} = -\frac{-302500-50625}{\left(\begin{bmatrix}-550 & 225\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-165000\\45000\end{bmatrix}\right)} = -\frac{-353125}{1008,75\cdot 10^{5}} = 350,061\cdot 10^{-5} = 0,0035$$

c.5. Se calculează: $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \lambda^{(k)}\cdot d^{(k)}$

$$x^{(1)} = x^{(0)} + \lambda^{(0)}\cdot d^{(0)} = \begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix} + 0,0035\cdot\begin{bmatrix}-550\\225\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-1,925\\0,7875\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0,075\\-0,2125\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$$

c.6. Se calculează g la pasul următor prin înlocuirea noilor valori x_1 şi x_2 în matricea $g = \nabla F$. Se verifică dacă matricea g la pasul următor este zero. Dacă este zero metoda se opreşte, deci s-au atins soluțiile optime.

Dacă nu este zero se **calculează** următoarea direcție de deplasare şi se reiau paşii c.4÷c.6.

În cazul nostru g la pasul următor este $g^{(1)}$. Înlocuim noile valori x_1 şi x_2 (x_1=0,075; x_2=-0,2125) în matricea $g = \nabla F$.

$$g^{(1)} = \nabla F = \begin{bmatrix}300\cdot x_1 - 50\\200\cdot x_2 - 25\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}300\cdot 0,075 - 50\\200\cdot(-2125) - 25\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-27,5\\-67,5\end{bmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{nu s-a atins soluția optimă}$$

Următoarea direcție de deplasare se calculează:

$$d^{(1)} = -g^{(1)} + \beta^{(1)}\cdot d^{(0)}$$

$$\beta^{(1)} = \frac{\left(g^{(1)}, g^{(1)}\right)}{\left(g^{(0)}, g^{(0)}\right)} = \frac{\begin{bmatrix}-27,5\\-67,5\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-27,5\\-67,5\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}550\\-225\end{bmatrix},\begin{bmatrix}550\\-225\end{bmatrix}} = \frac{\begin{bmatrix}-27,5 & -67,5\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-27,5\\-67,5\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}550 & -225\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}550\\-225\end{bmatrix}} = \frac{5312,5}{353125} = 0,0150$$

$$d^{(1)} = -g^{(1)} + \beta^{(1)}\cdot d^{(0)} = -\begin{bmatrix}-27,5\\-67,5\end{bmatrix} + 0,0150\cdot\begin{bmatrix}-550\\225\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}19,25\\70,875\end{bmatrix}$$

$$\lambda^{(1)} = -\frac{\left(g^{(1)}, d^{(1)}\right)}{\left(d^{(1)}, H\cdot d^{(1)}\right)} = -\frac{\left(\begin{bmatrix}-27,5\\-67,5\end{bmatrix},\begin{bmatrix}19,25\\70,875\end{bmatrix}\right)}{\left(\begin{bmatrix}19,25\\70,875\end{bmatrix},\begin{bmatrix}300 & 0\\0 & 200\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}19,25\\70,875\end{bmatrix}\right)} = -\frac{\left(\begin{bmatrix}-27,5\\-67,5\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}19,25 & 70,875\end{bmatrix}\right)}{\left(\begin{bmatrix}19,25\\70,875\end{bmatrix},\begin{bmatrix}5775\\14175\end{bmatrix}\right)}$$

$$\lambda^{(1)} = -\frac{-529,37-4784,06}{\left(\begin{bmatrix}19,25\\70,875\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}5775 & 14175\end{bmatrix}\right)} = -\frac{-5313,43}{11168,75+1004653,12} = 0,00476$$

$$x^{(2)} = x^{(1)} + \lambda^{(1)}\cdot d^{(1)} = \begin{bmatrix}0,075\\-0,2125\end{bmatrix} + 0,00476\cdot\begin{bmatrix}19,25\\70,875\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0,075\\-0,2125\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0,0916\\0,337\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0,1666\\0,1245\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$$

$$g^{(2)} = \nabla F = \begin{bmatrix} 300 \cdot x_1 - 50 \\ 200 \cdot x_2 - 25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 300 \cdot 0{,}1666 - 50 \\ 200 \cdot 0{,}1245 - 25 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow$$ **s-a atins soluţia optimă**

Soluţia optimă este:

$$x_1 = 0{,}1666$$
$$x_2 = 0{,}1245$$

d. Metoda Newton (metodă de ordinul II)

Această metodă, pentru funcţiile obiectiv pătratice, din orice punct $x^{(0)}$ s-ar porni permite obţinerea minimul într-un singur pas dacă se alege $\lambda^{(0)}$=1.

d.1. Se alege un $x^{(0)}$ (x la pasul zero) arbitrar $x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

d.2. Se calculează $g^{(0)}$ înlocuind valorile x_1 şi x_2 (din matricea anterioară) în matricea $g = \nabla F$

$$g^{(0)} = \nabla F = \begin{bmatrix} 300 \cdot x_1 - 50 \\ 200 \cdot x_2 - 25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 300 \cdot 0 - 50 \\ 200 \cdot 0 - 25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -50 \\ -25 \end{bmatrix}$$

d.3. Prima direcţie de deplasare se calculează cu relaţia:

$$d^{(0)} = -(H)^{-1} \cdot g^{(0)}$$

$$H \cdot H^{-1} = I \Rightarrow \begin{bmatrix} 300 & 0 \\ 0 & 200 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 300 \cdot a + 0 \cdot c = 1 \Rightarrow a = 1/300 \\ 300 \cdot b + 0 \cdot d = 0 \Rightarrow b = 0 \\ 0 \cdot a + 200 \cdot c = 0 \Rightarrow c = 0 \\ 0 \cdot b + 200 \cdot d = 1 \Rightarrow d = 1/200 \end{cases} \Rightarrow \quad H^{-1} = \begin{bmatrix} 1/300 & 0 \\ 0 & 1/200 \end{bmatrix}$$

$$d^{(0)} = -(H)^{-1} \cdot g^{(0)} = -\begin{bmatrix} 1/300 & 0 \\ 0 & 1/200 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -50 \\ -25 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} -0{,}167 \\ -0{,}125 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}167 \\ 0{,}125 \end{bmatrix}$$

d.4. Se **alege** pasul de deplasare: $\lambda^{(0)} = 1$

d.5. Se calculează: $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \lambda^{(k)} \cdot d^{(k)}$

$$x^{(1)} = x^{(0)} + \lambda^{(0)} \cdot d^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} 0{,}167 \\ 0{,}125 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0{,}167 \\ 0{,}125 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}167 \\ 0{,}125 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

d.6. Se calculează g la pasul următor prin înlocuirea noilor valori x_1 şi x_2 în matricea $g = \nabla F$, rezultatul obţinut trebuie să fie zero.

În cazul nostru g la pasul următor este $g^{(1)}$. Înlocuim noile valori x_1 şi x_2 (x_1=0,167; x_2=0,125) în matricea $g = \nabla F$.

$$g^{(2)} = \nabla F = \begin{bmatrix} 300 \cdot x_1 - 50 \\ 200 \cdot x_2 - 25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 300 \cdot 0{,}167 - 50 \\ 200 \cdot 0{,}125 - 25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow$$ **s-a atins soluţia optimă**

Soluţia optimă este:

$$x_1 = 0{,}167$$
$$x_2 = 0{,}125$$