METODE DE OPTIMIZARE DE ORDINUL 0, I ŞI II

1. Să se găsească:

$$\min\left(2\cdot x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - 8\cdot x_1 + 2\cdot x_2 + 2\cdot x_3 + 100\right)$$

cu $x_1 \in R$, $x_2 \in R$ utilizând:

a. metoda optimizării ciclice de-a lungul axelor de coordonate (metodă de ordinul 0);
b. metoda direcţiilor conjugate (metodă de ordinul 0);
c. metoda gradienţilor conjugaţi (metodă de ordinul I);
d. metoda Newton (metodă de ordinul II).

Deoarece în cadrul optimizării apar derivate de ordinul I şi ordinul al-II-lea termenul liber poate fi neglijat, astfel încât problema de optimizare devine:

$$\min\left(2\cdot x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - 8\cdot x_1 + 2\cdot x_2 + 2\cdot x_3\right)$$

Indiferent de metoda de optimizare utilizată pentru acest tip de problemă se calculează:

- gradientul funcţiei (derivata de ordinul I):

$$g = \nabla F = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial F(x)}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial F(x)}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial F(x)}{\partial x_n} \end{bmatrix} \tag{10.1}$$

În cazul nostru deoarece avem în problema de optimizare doar x_1 şi x_2, relaţia 10.1 devine:

$$g = \nabla F = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial F(x)}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial F(x)}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial F(x)}{\partial x_3} \end{bmatrix}$$

Formule derivate:

$\left(x^n\right)' = n\cdot x^{n-1}$; $(ct\cdot x)' = ct$; $(ct)' = 0$

$$g = \nabla F = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial F(x)}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial F(x)}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial F(x)}{\partial x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial\left(2\cdot x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - 8\cdot x_1 + 2\cdot x_2 + 2\cdot x_3\right)}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial\left(2\cdot x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - 8\cdot x_1 + 2\cdot x_2 + 2\cdot x_3\right)}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial\left(2\cdot x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - 8\cdot x_1 + 2\cdot x_2 + 2\cdot x_3\right)}{\partial x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4\cdot x_1 - 8 \\ 2\cdot x_2 + 2 \\ -2\cdot x_3 + 2 \end{bmatrix}$$

- Hessian-ul (derivata de ordinul al-II-lea):

$$H(x)=\begin{bmatrix} \frac{\partial F(x)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial F(x)}{\partial x_2 \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F(x)}{\partial x_n \partial x_1} \\ \frac{\partial F(x)}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial F(x)}{\partial x_2^2} & & \frac{\partial F(x)}{\partial x_n \partial x_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial F(x)}{\partial x_1 \partial x_n} & \frac{\partial F(x)}{\partial x_2 \partial x_n} & \cdots & \frac{\partial F(x)}{\partial x_n^2} \end{bmatrix} \tag{10.2}$$

În cazul nostru deoarece avem în problema de optimizare doar x_1, x_3 şi x_3, relația 10.2 devine:

$$H(x)=\begin{bmatrix} \frac{\partial F(x)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial F(x)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial F(x)}{\partial x_3 \partial x_1} \\ \frac{\partial F(x)}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial F(x)}{\partial x_2^2} & \frac{\partial F(x)}{\partial x_3 \partial x_2} \\ \frac{\partial F(x)}{\partial x_1 \partial x_3} & \frac{\partial F(x)}{\partial x_2 \partial x_3} & \frac{\partial F(x)}{\partial x_3^2} \end{bmatrix}$$

Completarea matricei Hessian:

$$\frac{\partial F(x)}{\partial x_1^2}=\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial F(x)}{\partial x_1}\right)=\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial\left(2\cdot x_1^2+x_2^2-x_3^2-8\cdot x_1+2\cdot x_2+2\cdot x_3\right)}{\partial x_1}\right)=\frac{\partial(4\cdot x_1-8)}{\partial x_1}=4$$

$$\frac{\partial F(x)}{\partial x_2 \partial x_1}=\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial F(x)}{\partial x_1}\right)=\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial\left(2\cdot x_1^2+x_2^2-x_3^2-8\cdot x_1+2\cdot x_2+2\cdot x_3\right)}{\partial x_1}\right)=\frac{\partial(4\cdot x_1-8)}{\partial x_2}=0$$

$$H(x)=\begin{bmatrix} \frac{\partial F(x)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial F(x)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial F(x)}{\partial x_3 \partial x_1} \\ \frac{\partial F(x)}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial F(x)}{\partial x_2^2} & \frac{\partial F(x)}{\partial x_3 \partial x_2} \\ \frac{\partial F(x)}{\partial x_1 \partial x_3} & \frac{\partial F(x)}{\partial x_2 \partial x_3} & \frac{\partial F(x)}{\partial x_3^2} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

a. Metoda optimizării ciclice de-a lungul axelor de coordonate (metodă de ordinul 0)

a.1. Se alege un $x^{(0)}$ (x la pasul zero) arbitrar $x^{(0)}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$

a.2. Se calculează $g^{(0)}$ înlocuind valorile x_1, x_2 şi x_3 (din matricea anterioară) în matricea $g=\nabla F$

$$g^{(0)}=\nabla F=\begin{bmatrix}4\cdot x_1-8\\2\cdot x_2+2\\-2\cdot x_3+2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\cdot 0-8\\2\cdot 0+2\\-2\cdot 0+2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-8\\2\\2\end{bmatrix}$$

a.3. Se alege prima direcție de-a lungul primei axe de coordonate: $d^{(0)}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$

a.4. Se calculează pasul de deplasare:

$$\lambda^{(k)} = -\frac{\left(g^{(k)}, d^{(k)}\right)}{\left(d^{(k)}, H \cdot d^{(k)}\right)}$$

În cazul nostru:

$$\lambda^{(0)} = -\frac{\left(g^{(0)}, d^{(0)}\right)}{\left(d^{(0)}, H \cdot d^{(0)}\right)} = -\frac{\left(\begin{bmatrix}-8\\2\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right)}{\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}4 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & -2\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right)} = -\frac{\left(\begin{bmatrix}-8\\2\\2\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}\right)}{\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}4\\0\\0\end{bmatrix}\right)} = -\frac{-8}{\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}4 & 0 & 0\end{bmatrix}\right)} = -\frac{-8}{4} = 2$$

a.5. Se calculează: $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \lambda^{(k)} \cdot d^{(k)}$

$$x^{(1)} = x^{(0)} + \lambda^{(0)} \cdot d^{(0)} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}2\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$$

a.6. Se calculează g la pasul următor prin înlocuirea noilor valori x_1, x_2 şi x_3 în matricea $g = \nabla F$. Se verifică dacă matricea g la pasul următor este zero. Dacă este zero metoda se opreşte, deci s-au atins soluțiile optime.

Dacă nu este zero se alege următoarea direcție de deplasare şi se reiau paşii a.4÷a.6.

În cazul nostru g la pasul următor este $g^{(1)}$. Înlocuim noile valori x_1, x_2 şi x_3 ($x_1=2$; $x_2=0$; $x_3=0$) în matricea $g = \nabla F$.

$$g^{(1)} = \nabla F = \begin{bmatrix}4 \cdot x_1 - 8\\2 \cdot x_2 + 2\\-2 \cdot x_3 + 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4 \cdot 2 - 8\\2 \cdot 0 + 2\\-2 \cdot 0 + 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\2\\2\end{bmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{nu s-a atins soluția optimă}$$

Următoarea direcție (de-a lungul celei de-a doua axe de coordonate) este: $d^{(1)} = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$

$$\lambda^{(1)} = -\frac{\left(g^{(1)}, d^{(1)}\right)}{\left(d^{(1)}, H \cdot d^{(1)}\right)} = -\frac{\left(\begin{bmatrix}0\\2\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right)}{\left(\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}4 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & -2\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right)} = -\frac{\left(\begin{bmatrix}0\\2\\2\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\end{bmatrix}\right)}{\left(\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\2\\0\end{bmatrix}\right)} = -\frac{2}{\left(\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}0 & 2 & 0\end{bmatrix}\right)} = -\frac{2}{2} = -1$$

$$x^{(2)} = x^{(1)} + \lambda^{(1)} \cdot d^{(1)} = \begin{bmatrix}2\\0\\0\end{bmatrix} + (-1) \cdot \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\0\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\-1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\-1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$$

$$g^{(2)} = \nabla F = \begin{bmatrix}4 \cdot x_1 - 8\\2 \cdot x_2 + 2\\-2 \cdot x_3 + 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4 \cdot 2 - 8\\2 \cdot (-1) + 2\\-2 \cdot 0 + 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\2\end{bmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{nu s-a atins soluția optimă}$$

Următoarea direcție (de-a lungul celei de-a doua axe de coordonate) este: $d^{(2)} = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$

$$\lambda^{(2)} = -\frac{\left(g^{(2)}, d^{(2)}\right)}{\left(d^{(2)}, H\cdot d^{(2)}\right)} = -\frac{\left(\begin{bmatrix}0\\0\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right)}{\left(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}4&0&0\\0&2&0\\0&0&-2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right)} = -\frac{\left(\begin{bmatrix}0\\0\\2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0&0&1\end{bmatrix}\right)}{\left(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\-2\end{bmatrix}\right)} = -\frac{2}{\left(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0&0&-2\end{bmatrix}\right)} = -\frac{2}{-2} = 1$$

$$x^{(3)} = x^{(2)} + \lambda^{(2)}\cdot d^{(2)} = \begin{bmatrix}2\\-1\\0\end{bmatrix} + 1\cdot\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\-1\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\-1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$$

$$g^{(2)} = \nabla F = \begin{bmatrix}4\cdot x_1 - 8\\2\cdot x_2 + 2\\-2\cdot x_3 + 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4\cdot 2 - 8\\2\cdot(-1) + 2\\-2\cdot 1 + 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \textbf{s-a atins soluția optimă}$$

Soluția optimă este:

$$x_1 = 2$$
$$x_2 = -1$$
$$x_3 = 1$$

b. Metoda direcțiilor conjugate (metodă de ordinul 0)

b.1. Se alege un $x^{(0)}$ (x la pasul zero) arbitrar $x^{(0)} = \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$

b.2. Se calculează $g^{(0)}$ înlocuind valorile x_1, x_2 şi x_3 (din matricea anterioară) în matricea $g = \nabla F$

$$g^{(0)} = \nabla F = \begin{bmatrix}4\cdot x_1 - 8\\2\cdot x_2 + 2\\-2\cdot x_3 + 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4\cdot 1 - 8\\2\cdot 2 + 2\\-2\cdot 3 + 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-4\\6\\-4\end{bmatrix}$$

b.3. Se alege prima direcție: $d^{(0)} = \begin{bmatrix}1/2\\\sqrt{3}/2\\0\end{bmatrix}$ dar cu $\left\|d^{(0)}\right\| = 1$ adică $\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 0^2 = 1$

b.4. Se calculează pasul de deplasare:

$$\lambda^{(k)} = -\frac{\left(g^{(k)}, d^{(k)}\right)}{\left(d^{(k)}, H\cdot d^{(k)}\right)}$$

$$\lambda^{(0)}=-\frac{\left(g^{(0)},d^{(0)}\right)}{\left(d^{(0)},H\cdot d^{(0)}\right)}=-\frac{\left(\begin{bmatrix}-4\\6\\-4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1/2\\\sqrt{3}/2\\0\end{bmatrix}\right)}{\left(\begin{bmatrix}1/2\\\sqrt{3}/2\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}4&0&0\\0&2&0\\0&0&-2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1/2\\\sqrt{3}/2\\0\end{bmatrix}\right)}=-\frac{\left(\begin{bmatrix}-8\\2\\2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1/2&\sqrt{3}/2&0\end{bmatrix}\right)}{\left(\begin{bmatrix}1/2\\\sqrt{3}/2\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\\sqrt{3}\\0\end{bmatrix}\right)}$$

$$\lambda^{(0)}=-\frac{-2+5{,}19}{\left(\begin{bmatrix}1/2\\\sqrt{3}/2\\0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2&\sqrt{3}&0\end{bmatrix}\right)}=-\frac{-3{,}19}{1+1{,}5+0}=-1{,}276$$

b.5. Se calculează: $x^{(k+1)}=x^{(k)}+\lambda^{(k)}\cdot d^{(k)}$

$$x^{(1)}=x^{(0)}+\lambda^{(0)}\cdot d^{(0)}=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}+(-1{,}276)\cdot\begin{bmatrix}1/2\\\sqrt{3}/2\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-0{,}638\\-1{,}105\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0{,}362\\0{,}895\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$$

b.6. Se calculează g la pasul următor prin înlocuirea noilor valori x_1, x_2 şi x_3 în matricea $g=\nabla F$. Se verifică dacă matricea g la pasul următor este zero. Dacă este zero metoda se opreşte, deci s-au atins soluțiile optime.

Dacă nu este zero se **calculează** următoarea direcție de deplasare şi se reiau paşii b.4÷b.6.

În cazul nostru g la pasul următor este $g^{(1)}$. Înlocuim noile valori x_1, x_2 şi x_3 (x_1=0,362; x_2=0,895, x_3=3) în matricea $g=\nabla F$.

$$g^{(1)}=\nabla F=\begin{bmatrix}4\cdot x_1-8\\2\cdot x_2+2\\-2\cdot x_3+2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\cdot 0{,}362-8\\2\cdot 0{,}895+2\\-2\cdot 3+2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-6{,}552\\3{,}79\\-4\end{bmatrix}\neq 0\Rightarrow \text{nu s-a atins soluția optimă}$$

Următoarea direcție de deplasare se calculează.

$$d^{(1)}=\begin{bmatrix}d_1^{(1)}\\d_2^{(1)}\\d_3^{(1)}\end{bmatrix}$$

$$\begin{cases}\left(d^{(1)},H\cdot d^{(0)}\right)=0\\\left\|d^{(1)}\right\|=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\left(\begin{bmatrix}d_1^{(1)}\\d_2^{(1)}\\d_3^{(1)}\end{bmatrix},\begin{bmatrix}4&0&0\\0&2&0\\0&0&-2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1/2\\\sqrt{3}/2\\0\end{bmatrix}\right)=0\\\left(d_1^{(1)}\right)^2+\left(d_2^{(1)}\right)^2=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\left(\begin{bmatrix}d_1^{(1)}\\d_2^{(1)}\\d_3^{(1)}\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\\sqrt{3}\\0\end{bmatrix}\right)=0\\\left(d_1^{(1)}\right)^2+\left(d_2^{(1)}\right)^2+\left(d_3^{(1)}\right)^2=1\end{cases}$$

$$\begin{cases}\begin{bmatrix}d_1^{(1)}\\d_2^{(1)}\\d_3^{(1)}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2&\sqrt{3}&0\end{bmatrix}=0\\\left(d_1^{(1)}\right)^2+\left(d_2^{(1)}\right)^2+\left(d_3^{(1)}\right)^2=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2\cdot d_1^{(1)}+\sqrt{3}\cdot d_2^{(1)}=0\\\left(d_1^{(1)}\right)^2+\left(d_2^{(1)}\right)^2+\left(d_3^{(1)}\right)^2=1\end{cases}$$

Sistemul are două ecuații cu trei necunoscute. Se mai impune o condiție arbitrară (pentru uşurința sistemului): $d_1^{(1)}=0$

$$\begin{cases} 2\cdot 0+\sqrt{3}\cdot d_2^{(1)}=0 \Rightarrow d_2^{(1)}=0 \\ \left(d_1^{(1)}\right)^2+\left(d_2^{(1)}\right)^2+\left(d_3^{(1)}\right)^2=1 \Rightarrow 0^2+0^2+\left(d_3^{(1)}\right)^2=1 \Rightarrow d_3^{(1)}=1 \end{cases}$$

$$d^{(1)}=\begin{bmatrix} d_1^{(1)} \\ d_2^{(1)} \\ d_3^{(1)} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda^{(1)}=-\frac{\left(g^{(1)},d^{(1)}\right)}{\left(d^{(1)},H\cdot d^{(1)}\right)}=-\frac{\left(\begin{bmatrix} -6{,}552 \\ 3{,}79 \\ -4 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)}{\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)}=-\frac{\left(\begin{bmatrix} -6{,}552 \\ 3{,}79 \\ -4 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right)}{\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}\right)}$$

$$\lambda^{(1)}=-\frac{-4}{\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}\right)}=-\frac{-4}{-2}=-2$$

$$x^{(2)}=x^{(1)}+\lambda^{(1)}\cdot d^{(1)}=\begin{bmatrix} 0{,}362 \\ 0{,}895 \\ 3 \end{bmatrix}+(-2)\cdot\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0{,}362 \\ 0{,}895 \\ 3 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0{,}362 \\ 0{,}895 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$g^{(2)}=\nabla F=\begin{bmatrix} 4\cdot x_1-8 \\ 2\cdot x_2+2 \\ -2\cdot x_3+2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4\cdot 0{,}362-8 \\ 2\cdot 0{,}895+2 \\ -2\cdot 1+2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -6{,}552 \\ 3{,}79 \\ 0 \end{bmatrix}\neq 0 \Rightarrow \text{nu s-a atins soluția optimă}$$

Următoarea direcție de deplasare se calculează.

$$d^{(2)}=\begin{bmatrix} d_1^{(2)} \\ d_2^{(2)} \\ d_3^{(2)} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} d^{(2)},H\cdot d^{(0)}=0 \\ d^{(2)},H\cdot d^{(1)}=0 \\ \left\|d^{(2)}\right\|=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{bmatrix} d_1^{(2)} \\ d_2^{(2)} \\ d_3^{(2)} \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \\ 0 \end{bmatrix}=0 \\ \begin{bmatrix} d_1^{(2)} \\ d_2^{(2)} \\ d_3^{(2)} \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}=0 \\ \left(d_1^{(2)}\right)^2+\left(d_2^{(2)}\right)^2+\left(d_3^{(3)}\right)^2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{bmatrix} d_1^{(2)} \\ d_2^{(2)} \\ d_3^{(2)} \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 2 \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{bmatrix}=0 \\ \begin{bmatrix} d_1^{(2)} \\ d_2^{(2)} \\ d_3^{(2)} \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}=0 \\ \left(d_1^{(2)}\right)^2+\left(d_2^{(2)}\right)^2+\left(d_3^{(3)}\right)^2=1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\begin{bmatrix}d_1^{(2)}\\ d_2^{(2)}\\ d_3^{(2)}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2 & \sqrt{3} & 0\end{bmatrix}=0\\ \begin{bmatrix}d_1^{(2)}\\ d_2^{(2)}\\ d_3^{(2)}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0 & 0 & -2\end{bmatrix}=0\\ \left(d_1^{(2)}\right)^2+\left(d_2^{(2)}\right)^2+\left(d_3^{(3)}\right)^2=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2\cdot d_1^{(2)}+\sqrt{3}\cdot d_2^{(2)}=0\\ -2\cdot d_3^{(2)}=0\Rightarrow d_3^{(2)}=0\\ \left(d_1^{(2)}\right)^2+\left(d_2^{(2)}\right)^2+\left(d_3^{(3)}\right)^2=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2\cdot d_1^{(2)}+\sqrt{3}\cdot d_2^{(2)}=0\\ d_3^{(2)}=0\\ \left(d_1^{(2)}\right)^2+\left(d_2^{(2)}\right)^2=1\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}2\cdot d_1^{(2)}+\sqrt{3}\cdot d_2^{(2)}=0\Rightarrow d_1^{(2)}=-\frac{\sqrt{3}}{2}d_2^{(2)}\\ d_3^{(2)}=0\\ \left(d_1^{(2)}\right)^2+\left(d_2^{(2)}\right)^2=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}d_1^{(2)}=-\frac{\sqrt{3}}{2}d_2^{(2)}\\ d_3^{(2)}=0\\ \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}d_2^{(2)}\right)^2+\left(d_2^{(2)}\right)^2=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}d_1^{(2)}=-\frac{\sqrt{3}}{2}d_2^{(2)}\\ d_3^{(2)}=0\\ \frac{3}{4}\left(d_2^{(2)}\right)^2+\left(d_2^{(2)}\right)^2=1\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}d_1^{(2)}=-\frac{\sqrt{3}}{2}d_2^{(2)}\\ d_3^{(2)}=0\\ d_2^{(2)}=\sqrt{\frac{1}{\frac{3}{4}+1}}=0{,}755\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}d_1^{(2)}=-\frac{\sqrt{3}}{2}d_2^{(2)}=-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 0{,}755=-0{,}653\\ d_3^{(2)}=0\\ d_2^{(2)}=0{,}755\end{cases}$$

$$d^{(2)}=\begin{bmatrix}d_1^{(2)}\\ d_2^{(2)}\\ d_3^{(2)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-0{,}653\\ 0{,}755\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\lambda^{(2)}=-\frac{\left(g^{(2)},d^{(2)}\right)}{\left(d^{(2)},H\cdot d^{(2)}\right)}=-\frac{\left(\begin{bmatrix}-6{,}552\\ 3{,}79\\ 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-0{,}653\\ 0{,}755\\ 0\end{bmatrix}\right)}{\left(\begin{bmatrix}-0{,}653\\ 0{,}755\\ 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}4 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-0{,}653\\ 0{,}755\\ 1\end{bmatrix}\right)}=-\frac{\left(\begin{bmatrix}-6{,}552\\ 3{,}79\\ -4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-0{,}653 & 0{,}755 & 0\end{bmatrix}\right)}{\left(\begin{bmatrix}-0{,}653\\ 0{,}755\\ 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-2{,}612\\ 1{,}51\\ 0\end{bmatrix}\right)}$$

$$\lambda^{(2)}=-\frac{4{,}278+2{,}861+0}{\left(\begin{bmatrix}-0{,}653\\ 0{,}755\\ 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-2{,}612 & 1{,}51 & 0\end{bmatrix}\right)}=-\frac{7{,}139}{1{,}705+1{,}14+0}=-\frac{7{,}139}{2{,}845}=-2{,}509$$

$$x^{(3)} = x^{(2)} + \lambda^{(2)} \cdot d^{(2)} = \begin{bmatrix} 0,362 \\ 0,895 \\ 1 \end{bmatrix} + (-2,509) \cdot \begin{bmatrix} -0,653 \\ 0,755 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,362 \\ 0,895 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1,638 \\ -1,894 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -0,999 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$g^{(3)} = \nabla F = \begin{bmatrix} 4 \cdot x_1 - 8 \\ 2 \cdot x_2 + 2 \\ -2 \cdot x_3 + 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \cdot 2 - 8 \\ 2 \cdot (-0,999) + 2 \\ -2 \cdot 1 + 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -0,002 \\ 0 \end{bmatrix} \cong 0 \Rightarrow \textbf{s-a atins soluția optimă}$$

Soluția optimă este:

$$x_1 = 2$$
$$x_2 = -0,999$$
$$x_3 = 1$$

Direcțiile conjugate

$d^{(0)} \rightarrow$ se aleg arbitrar dar cu $\left\| d^{(0)} \right\| = 1$

$$d^{(1)} \rightarrow \text{se calculează: } \begin{cases} d^{(1)}, H \cdot d^{(0)} = 0 \\ \left\| d^{(1)} \right\| = 1 \end{cases}$$

$$d^{(2)} \rightarrow \text{se calculează: } \begin{cases} d^{(2)}, H \cdot d^{(0)} = 0 \\ d^{(2)}, H \cdot d^{(1)} = 0 \\ \left\| d^{(2)} \right\| = 1 \end{cases}$$

$$d^{(n)} \rightarrow \text{se calculează: } \begin{cases} d^{(n)}, H \cdot d^{(0)} = 0 \\ d^{(n)}, H \cdot d^{(1)} = 0 \\ \cdots \\ d^{(n)}, H \cdot d^{(n-1)} = 0 \\ \left\| d^{(n)} \right\| = 1 \end{cases}$$

c. Metoda gradienților conjugați (metodă de ordinul I)

c.1. Se alege un $x^{(0)}$ (x la pasul zero) arbitrar $x^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

c.2. Se calculează $g^{(0)}$ înlocuind valorile x_1, x_2 şi x_3 (din matricea anterioară) în matricea $g = \nabla F$

$$g^{(0)} = \nabla F = \begin{bmatrix} 4 \cdot x_1 - 8 \\ 2 \cdot x_2 + 2 \\ -2 \cdot x_3 + 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \cdot 1 - 8 \\ 2 \cdot 1 + 2 \\ -2 \cdot 1 + 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} \neq 0$$

c.3. Se calculează direcția curentă cu relația:

$$d^{(k)} = -g^{(k)} + \beta^{(k)} \cdot d^{(k-1)}, \text{ unde: } \beta^{(k)} = \frac{\left(g^{(k)}, g^{(k)}\right)}{\left(g^{(k-1)}, g^{(k-1)}\right)}$$

La pasul zero: $d^{(0)} = -g^{(0)} = -\begin{bmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix}$

c.4. Se calculează pasul de deplasare:

$$\lambda^{(k)} = -\frac{\left(g^{(k)}, d^{(k)}\right)}{\left(d^{(k)}, H \cdot d^{(k)}\right)}$$

În cazul nostru:

$$\lambda^{(2)} = -\frac{\left(g^{(2)}, d^{(2)}\right)}{\left(d^{(2)}, H \cdot d^{(2)}\right)} = -\frac{\left(\begin{bmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix}\right)}{\left(\begin{bmatrix} 4 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -0{,}653 \\ 0{,}755 \\ 1 \end{bmatrix}\right)} = -\frac{\left(\begin{bmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -4 & 0 \end{bmatrix}\right)}{\left(\begin{bmatrix} 4 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 16 \\ -8 \\ 0 \end{bmatrix}\right)}$$

$$\lambda^{(2)} = -\frac{-32}{\left(\begin{bmatrix} 4 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 16 & -8 & 0 \end{bmatrix}\right)} = -\frac{-32}{64 + 32 + 0} = -\frac{-32}{96} = 0{,}333$$

c.5. Se calculează: $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \lambda^{(k)} \cdot d^{(k)}$

$$x^{(1)} = x^{(0)} + \lambda^{(0)} \cdot d^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 0{,}333 \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1{,}332 \\ -1{,}332 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2{,}332 \\ -0{,}332 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

c.6. Se calculează g la pasul următor prin înlocuirea noilor valori x_1, x_2 şi x_3 în matricea $g = \nabla F$. Se verifică dacă matricea g la pasul următor este zero. Dacă este zero metoda se opreşte, deci s-au atins soluțiile optime.

Dacă nu este zero se **calculează** următoarea direcție de deplasare şi se reiau paşii c.4÷c.6.

În cazul nostru g la pasul următor este $g^{(1)}$. Înlocuim noile valori x_1, x_2 şi x_3 (x_1=0,2,332; x_2=-0,332; x_3=1) în matricea $g = \nabla F$.

$$g^{(1)} = \nabla F = \begin{bmatrix} 4 \cdot x_1 - 8 \\ 2 \cdot x_2 + 2 \\ -2 \cdot x_3 + 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \cdot 2{,}332 - 8 \\ 2 \cdot (-0{,}332) + 2 \\ -2 \cdot 1 + 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}328 \\ 1{,}336 \\ 0 \end{bmatrix} \neq 0 \text{ nu s-a atins soluția optimă}$$

Următoarea direcție de deplasare se calculează:

$$d^{(1)} = -g^{(1)} + \beta^{(1)} \cdot d^{(0)}$$

$$\beta^{(1)}=\frac{\left(g^{(1)},g^{(1)}\right)}{\left(g^{(0)},g^{(0)}\right)}=\frac{\begin{bmatrix}1{,}328\\1{,}336\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1{,}328\\1{,}336\\0\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}-4\\4\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-4\\4\\0\end{bmatrix}}=\frac{\begin{bmatrix}1{,}328 & 1{,}336 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1{,}328\\1{,}336\\0\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}-4 & 4 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-4\\4\\0\end{bmatrix}}=\frac{1{,}763+1{,}784+0}{1+16+0}=0{,}110$$

$$d^{(1)}=-g^{(1)}+\beta^{(1)}\cdot d^{(0)}=-\begin{bmatrix}1{,}328\\1{,}336\\0\end{bmatrix}+0{,}11\cdot\begin{bmatrix}4\\-4\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1{,}328\\-1{,}336\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0{,}44\\-0{,}44\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-0{,}888\\-1{,}776\\0\end{bmatrix}$$

$$\lambda^{(1)}=-\frac{\left(g^{(1)},d^{(1)}\right)}{\left(d^{(1)},H\cdot d^{(1)}\right)}=-\frac{\left(\begin{bmatrix}1{,}328\\1{,}336\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-0{,}888\\-1{,}776\\0\end{bmatrix}\right)}{\left(\begin{bmatrix}-0{,}888\\-1{,}776\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}4 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & -2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-0{,}888\\-1{,}776\\0\end{bmatrix}\right)}=-\frac{\left(\begin{bmatrix}1{,}328\\1{,}336\\0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-0{,}888 & -1{,}776 & 0\end{bmatrix}\right)}{\left(\begin{bmatrix}-0{,}888\\-1{,}776\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-3{,}552\\-3{,}552\\0\end{bmatrix}\right)}$$

$$\lambda^{(1)}=-\frac{-3{,}551}{\left(\begin{bmatrix}-0{,}888\\-1{,}776\\0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-3{,}552 & -3{,}552 & 0\end{bmatrix}\right)}=-\frac{-3{,}551}{9{,}462}=0{,}375$$

$$x^{(2)}=x^{(1)}+\lambda^{(1)}\cdot d^{(1)}=\begin{bmatrix}2{,}332\\-0{,}332\\1\end{bmatrix}+0{,}375\cdot\begin{bmatrix}-0{,}888\\-1{,}776\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2{,}332\\-0{,}332\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-0{,}333\\-0{,}666\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1{,}999\\-0{,}998\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$$

$$g^{(2)}=\nabla F=\begin{bmatrix}4\cdot x_1-8\\2\cdot x_2+2\\-2\cdot x_3+2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\cdot 1{,}999-8\\2\cdot(-0{,}998)+2\\-2\cdot 1+2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-0{,}004\\0{,}004\\0\end{bmatrix}\neq 0 \text{ nu s-a atins soluția optimă}$$

Următoarea direcție de deplasare se calculează:

$$d^{(2)}=-g^{(2)}+\beta^{(2)}\cdot d^{(1)}$$

$$\beta^{(2)}=\frac{\left(g^{(2)},g^{(2)}\right)}{\left(g^{(1)},g^{(1)}\right)}=\frac{\begin{bmatrix}-0{,}004\\0{,}004\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-0{,}004\\0{,}004\\0\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}1{,}328\\1{,}336\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1{,}328\\1{,}336\\0\end{bmatrix}}=\frac{\begin{bmatrix}-0{,}004 & 0{,}004 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-0{,}004\\0{,}004\\0\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}1{,}328 & 1{,}336 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1{,}328\\1{,}336\\0\end{bmatrix}}=\frac{0{,}000032}{3{,}145}=0{,}00001017$$

$$d^{(2)} = -g^{(2)} + \beta^{(2)} \cdot d^{(1)} = -\begin{bmatrix} -0,004 \\ 0,004 \\ 0 \end{bmatrix} + 0,00001017 \cdot \begin{bmatrix} -0,888 \\ -1,776 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,0039909 \\ -0,0039819 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda^{(2)} = -\frac{\left(g^{(2)}, d^{(2)}\right)}{\left(d^{(2)}, H \cdot d^{(2)}\right)} = -\frac{\left(\begin{bmatrix} -0,004 \\ 0,004 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0,0039909 \\ -0,0039819 \\ 0 \end{bmatrix}\right)}{\left(\begin{bmatrix} 0,0039909 \\ -0,0039819 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,0039909 \\ -0,0039819 \\ 0 \end{bmatrix}\right)} = -\frac{\left([-0,004 \quad 0,004 \quad 0] \cdot \begin{bmatrix} 0,0039909 \\ -0,0039819 \\ 0 \end{bmatrix}\right)}{\left(\begin{bmatrix} 0,0039909 \\ -0,0039819 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0,01596 \\ -0,00796 \\ 0 \end{bmatrix}\right)}$$

$$\lambda^{(1)} = -\frac{-0,00003189}{\left(\begin{bmatrix} 0,0039909 \\ -0,0039819 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot [0,01596 \quad -0,00796 \quad 0]\right)} = -\frac{-0,00003189}{0,00009542} = 0,334$$

$$x^{(3)} = x^{(2)} + \lambda^{(2)} \cdot d^{(2)} = \begin{bmatrix} 1,999 \\ -0,998 \\ 1 \end{bmatrix} + 0,334 \cdot \begin{bmatrix} 0,0039909 \\ -0,0039819 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,003 \\ -0,999 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$g^{(3)} = \nabla F = \begin{bmatrix} 4 \cdot x_1 - 8 \\ 2 \cdot x_2 + 2 \\ -2 \cdot x_3 + 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \cdot 2,003 - 8 \\ 2 \cdot (-0,998) + 2 \\ -2 \cdot 1 + 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,012 \\ 0,002 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \textbf{s-a atins soluția optimă}$$

Soluția optimă este:

$$x_1 = 2,003$$
$$x_2 = -0,999$$
$$x_3 = 1$$

d. Metoda Newton (metodă de ordinul II)

Această metodă, pentru funcțiile obiectiv pătratice, din orice punct $x^{(0)}$ s-ar porni permite obținerea minimul într-un singur pas dacă se alege $\lambda^{(0)}$=1.

d.1. Se alege un $x^{(0)}$ (x la pasul zero) arbitrar $x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

d.2. Se calculează $g^{(0)}$ înlocuind valorile x_1 şi x_2 (din matricea anterioară) în matricea $g = \nabla F$

$$g^{(0)} = \nabla F = \begin{bmatrix} 4 \cdot x_1 - 8 \\ 2 \cdot x_2 + 2 \\ -2 \cdot x_3 + 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \cdot 0 - 8 \\ 2 \cdot 0 + 2 \\ -2 \cdot 0 + 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \neq 0$$

d.3. Prima direcție de deplasare se calculează cu relația:

$$d^{(0)} = -(H)^{-1} \cdot g^{(0)}$$

$$H \cdot H^{-1} = I \Rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 4 \cdot a + 0 \cdot d + 0 \cdot g = 1 \Rightarrow a = 1/4 \\ 4 \cdot b + 0 \cdot e + 0 \cdot h = 0 \Rightarrow b = 0 \\ 4 \cdot c + 0 \cdot f + 0 \cdot i = 0 \Rightarrow i = 0 \\ 0 \cdot a + 2 \cdot d + 0 \cdot g = 0 \Rightarrow d = 0 \\ 0 \cdot b + 2 \cdot e + 0 \cdot h = 1 \Rightarrow e = 1/2 \\ 0 \cdot c + 2 \cdot f + 0 \cdot i = 0 \Rightarrow f = 0 \\ 0 \cdot a + 0 \cdot d - 2 \cdot g = 0 \Rightarrow g = 0 \\ 0 \cdot b + 0 \cdot e - 2 \cdot h = 0 \Rightarrow h = 0 \\ 0 \cdot c + 0 \cdot f - 2 \cdot i = 1 \Rightarrow i = -1/2 \end{cases} \Rightarrow \quad H^{-1} = \begin{bmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{bmatrix}$$

$$d^{(0)} = -(H)^{-1} \cdot g^{(0)} = -\begin{bmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -8 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

d.4. Se **alege** pasul de deplasare: $\lambda^{(0)} = 1$

d.5. Se calculează: $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \lambda^{(k)} \cdot d^{(k)}$

$$x^{(1)} = x^{(0)} + \lambda^{(0)} \cdot d^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

d.6. Se calculează g la pasul următor prin înlocuirea noilor valori x_1, x_2 şi x_3 în matricea $g = \nabla F$, rezultatul obținut trebuie să fie zero.

În cazul nostru g la pasul următor este $g^{(1)}$. Înlocuim noile valori x_1, x_2 şi x_3 ($x_1=2$; $x_2=-1$; $x_3=1$) în matricea $g = \nabla F$.

$$g^{(0)} = \nabla F = \begin{bmatrix} 4 \cdot x_1 - 8 \\ 2 \cdot x_2 + 2 \\ -2 \cdot x_3 + 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \cdot 2 - 8 \\ 2 \cdot (-1) + 2 \\ -2 \cdot 1 + 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$ **s-a atins soluția optimă**

Soluția optimă este:

$$x_1 = 2$$
$$x_2 = -1$$
$$x_3 = 1$$