PROGRAMAREA LINIARĂ

1. Să se optimizeze:

$\max F(x_1, x_2) = 10 \cdot x_1 + 8 \cdot x_2$ - funcția de maximizare

$$\begin{cases} x_1 \le 50 \\ x_2 \le 50 \\ 0{,}4 \cdot 10 \cdot x_1 + 0{,}5 \cdot 8 \cdot x_2 \le 350 \end{cases}$$ - sistem de restricții

$x_1 \ge 0; \quad x_2 \ge 0$

Trecerea de la ***forma canonică*** la ***forma standard*** se face prin adăugarea unei variabile suplimentare (de egalizare) pentru fiecare inecuație a sistemului de restricții.

În cazul nostru sistemul are trei inecuații, deci se vor introduce trei variabile de egalizare notate: x_3, x_4, x_5.

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 50 \\ x_2 + x_4 = 50 \\ 0{,}4 \cdot 10 \cdot x_1 + 0{,}5 \cdot 8 \cdot x_2 + x_5 = 350 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0; \quad x_2 \ge 0; \quad x_3 \ge 0; \quad x_4 \ge 0; \quad x_5 \ge 0$

Acest sistem se mai poate scrie:

$$\begin{cases} x_1 + 0 \cdot x_2 + x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 = 50 \\ 0 \cdot x_1 + x_2 + 0 \cdot x_3 + x_4 + 0 \cdot x_5 = 50 \\ 4 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + x_5 = 350 \end{cases}$$

Din sistemul de ecuații se construiește matricea A și b:

$$\begin{array}{ccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \end{array}$$
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \qquad b = \begin{bmatrix} 50 \\ 50 \\ 350 \end{bmatrix}$$

Funcția de maximizare devine:

$$\max F(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = 10 \cdot x_1 + 8 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5$$

Se construiește matricea C:

$$\begin{array}{ccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \end{array}$$
$$C_j = \begin{bmatrix} 10 & 8 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Pentru identificarea soluțiilor oprime se trasează următorul tabel.

pivot intră în bază iese din bază

	C_j	10	8	0	0	0		
C^B	**Baza**	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	**b**	
0	a_3	$\boxed{1}$	0	1	0	0	50	50/1=50
0	a_4	0	1	0	1	0	50	50/0=-
0	a_5	4	4	0	0	1	350	350/4=87,5
Z_j		0	0	0	0	0	0	
Z_j-C_j		-10	-8	0	0	0		
		<0	**<0**	=0	=0	=0		

Completarea tabelului:

- linia C_j din tabel se completează cu valorile din matricea C_j;
- coloanele a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 din tabel se completează cu valori din matricea A;
- coloana b din tabel se completează cu valorile din matricea b;
- pe coloana cu Baza se trec variabilele suplimentare (de egalizare) cazul nostru a_3, a_4, a_5 (litere);
- coloana C^B se completează cu valorile lui a_3, a_4, a_5 luate din matricea C_j (adică inițial cu zero);
- linia Z_j se completează astfel: $Z_j=C^B \cdot a_i$, adică:

$$C^B \cdot a_1 = 0\cdot 1 + 0\cdot 0 + 0\cdot 4 = 0$$
$$C^B \cdot a_2 = 0\cdot 0 + 0\cdot 1 + 0\cdot 4 = 0$$
$$C^B \cdot a_3 = 0\cdot 1 + 0\cdot 0 + 0\cdot 0 = 0$$
$$C^B \cdot a_4 = 0\cdot 0 + 0\cdot 1 + 0\cdot 0 = 0$$
$$C^B \cdot a_5 = 0\cdot 0 + 0\cdot 0 + 0\cdot 1 = 0$$
$$C^B \cdot b = 0\cdot 50 + 0\cdot 50 + 0\cdot 350 = 0$$

- se calculează apoi diferența Z_j-C_j, rezultând pe coloanele a_1 şi a_2 valorile –10 şi –8. Deoarece există diferențe (negative) Z_j-C_j<0 **rezultă că soluția nu este optimă**;
- pentru stabilirea vectorului care intră în bază se caută maximul diferențelor negative $\max\left|Z_j - C_j\right|$ astfel:

$$\max\left|Z_j - C_j\right| = \max\left|-10, -8\right| = \max(10,8) = 10$$

Deoarece valoarea 10 (rezultată din $\left|-10\right|$) se găseşte pe coloana a_1 **rezultă că vectorul a_1 intră în bază**.

- pentru a determina vectorul care iese din bază se pune condiția:

$$\min\left\{\frac{b}{a_1}\right\} \Rightarrow \min\left\{\frac{50}{1}, \frac{50}{0}, \frac{350}{4}\right\} = \min\{50,-,87{,}5\} = 50$$

ATENȚIE: La numitor se trec componentele vectorului care intră în bază (cazul nostru componentele vectorului a_1).

Deoarece valoarea 50 se găseşte pe a prima linie, se caută pe această linie în vectorul de bază valoarea „1”. În cazul nostru cifra „1” am găsit-o pe coloana a_3, rezultă că a_3 iese din bază.

- se stabileşte pivotul care se găseşte la intersecția dintre coloana care intră în vectorul de bază (a_1 în cazul nostru) şi linia pe care am găsit minimul $\min\left\{\frac{b}{a_1}\right\} = 50$ (prima linie în cazul nostru).

Se completează un nou tabel, astfel:

- linia C_j din tabel se completează cu valorile din matricea C_j;

pivot intră în bază iese din bază

	C_j	10	8	0	0	0		
C^B	**Baza**	**a_1**	**a_2**	**a_3**	**a_4**	**a_5**	**b**	
10	**a_1**	1	0	1	0	0	50	50/0=-
0	**a_4**	0	1	0	1	0	50	50/1=50
0	**a_5**	0	$\boxed{4}$	-4	0	1	150	150/4=37,5
Z_j		10	0	10	0	0	500	
Z_j-C_j		0	-8	10	0	0		
		=0	**<0**	>0	=0	=0		

- pe coloana Bază, deoarece s-a stabilit că a_1 trebuie să intre în bază şi a_3 iese din bază se trece în loc de $a_3 \rightarrow a_1$;
- pe coloana C^B se trec valorile a_1, a_4, a_5 din vectorul C_j;
- linia pivotului din tabelul anterior se împarte la pivot;
- coloana pivotului (a_1 în cazul nostru) se completează cu 0;
- restul elementelor se cu regula pivotului astfel:

a_2	a_1	a_2^{nou}
m=0	o=$\boxed{1}$	m/o=0$\boxed{/}$1 = 0 – pe linia cu pivotul elementul se împarte la pivot
n=1	p=0	$\frac{o \cdot n - p \cdot m}{o} = \frac{1 \cdot 1 - 0 \cdot 0}{\boxed{1}} = 1$
r=4	s=4	$\frac{o \cdot r - s \cdot m}{o} = \frac{1 \cdot 4 - 4 \cdot 0}{\boxed{1}} = 4$

a_3	a_1	a_3^{nou}
1	$\boxed{1}$	1 / $\boxed{1}$= 1 – pe linia cu pivotul elementul se împarte la pivot
0	0	$\frac{1 \cdot 0 - 0 \cdot 1}{\boxed{1}} = 0$
0	4	$\frac{1 \cdot 0 - 4 \cdot 1}{\boxed{1}} = -4$

a_4	a_1	a_4^{nou}
0	$\boxed{1}$	$0 / \boxed{1} = 0$ – pe linia cu pivotul elementul se împarte la pivot
1	0	$\frac{1 \cdot 1 - 0 \cdot 0}{\boxed{1}} = 1$
0	4	$\frac{1 \cdot 0 - 4 \cdot 0}{\boxed{1}} = 0$

a_5	a_1	a_5^{nou}
0	$\boxed{1}$	$0 / \boxed{1} = 0$ – pe linia cu pivotul elementul se împarte la pivot
0	0	$\frac{1 \cdot 0 - 0 \cdot 0}{\boxed{1}} = 0$
1	4	$\frac{1 \cdot 1 - 4 \cdot 0}{\boxed{1}} = 1$

b	a_1	b^{nou}
50	$\boxed{1}$	$50 / \boxed{1} = 50$ – pe linia cu pivotul elementul se împarte la pivot
50	0	$\frac{1 \cdot 50 - 0 \cdot 50}{\boxed{1}} = 50$
350	4	$\frac{1 \cdot 350 - 4 \cdot 50}{\boxed{1}} = 150$

- linia Z_j se completează astfel: $Z_j = C^B \cdot a_i$, adică:

$$C^B \cdot a_1 = 10 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 10$$
$$C^B \cdot a_2 = 10 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 4 = 0$$
$$C^B \cdot a_3 = 10 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot (-4) = 10$$
$$C^B \cdot a_4 = 10 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 0$$
$$C^B \cdot a_5 = 10 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$$
$$C^B \cdot b = 10 \cdot 50 + 0 \cdot 50 + 0 \cdot 150 = 500$$

- se calculează apoi diferența Z_j-C_j, rezultând pe coloanele a_1 şi a_2 valorile 0 şi –8. Deoarece există o diferență (negativă) Z_j-C_j<0 **rezultă că soluția nu este optimă**;
- pentru stabilirea vectorului care intră în bază se caută maximul **DIFERENȚELOR NEGATIVE** $\max\left|Z_j - C_j\right|$ astfel:

$$\max\left|Z_j - C_j\right| = \max\left|-8\right| = \max(8) = 8$$

Deoarece valoarea 8 (rezultată din $\left|-8\right|$) se găseşte pe coloana a_2 **rezultă că vectorul a_2 intră în bază**.

- pentru a determina vectorul care iese din bază se pune condiția:

$$\min\left\{\frac{b}{a_2}\right\} \Rightarrow \min\left\{\frac{50}{0}, \frac{50}{1}, \frac{150}{4}\right\} = \min\{-; 50; 37,5\} = 37,5$$

ATENȚIE: La numitor se trec componentele vectorului care intră în bază (cazul nostru componentele vectorului a_2).

Deoarece valoarea 37,5 se găseşte pe a treia linie, se caută pe această linie în vectorul de bază valoarea „1”. În cazul nostru cifra „1” am găsit-o pe coloana a_4, rezultă că a_5 iese din bază.

- se stabileşte pivotul care se găseşte la intersecția dintre coloana care intră în vectorul de bază (a_2 în cazul nostru) şi linia pe care am găsit minimul $\min\left\{\frac{b}{a_2}\right\} = 37{,}5$ (a treia linie în cazul nostru).

Se completează un nou tabel, astfel:

- linia C_j din tabel se completează cu valorile din matricea C_j;

	C_j	10	8	0	0	0		
C^B	**Baza**	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	**b**	
10	a_1	1	0	1	0	0	50	
0	a_4	0	0	1	1	-0,25	12,5	
8	a_2	0	1	-1	0	0,25	37,5	
Z_j		10	8	2	0	2	800	
Z_j-C_j		>0	>0	>0	=0	>0		

- pe coloana Bază, deoarece s-a stabilit că a_2 trebuie să intre în bază şi a_5 iese din bază se trece în loc de $a_5 \rightarrow a_2$;
- pe coloana C^B se trec valorile a_1, a_4, a_2 din vectorul C_j;
- linia pivotului din tabelul anterior se împarte la pivot;
- coloana pivotului (a_2 în cazul nostru) se completează cu 0;
- restul elementelor se cu regula pivotului astfel:

a_1	a_2	a_1^{nou}
m=1	o=0	$\frac{s\cdot m - o\cdot r}{s} = \frac{4\cdot 1 - 0\cdot 0}{\boxed{4}} = 1$
n=0	p=1	$\frac{o\cdot n - p\cdot r}{s} = \frac{4\cdot 0 - 1\cdot 0}{\boxed{4}} = 0$
r=0	s=$\boxed{4}$	r/s=0 /$\boxed{4}$ = 0 – pe linia cu pivotul elementul se împarte la pivot

a_3	a_1	a_3^{nou}
1	0	$\frac{4\cdot 1 - 0\cdot(-4)}{\boxed{4}} = 1$
0	1	$\frac{4\cdot 0 - 1\cdot(-4)}{\boxed{4}} = 1$
-4	$\boxed{4}$	-4/$\boxed{4}$=-1– pe linia cu pivotul elementul se împarte la pivot

a_4	a_1	a_4^{nou}
0	0	$\frac{4\cdot 0-0\cdot 0}{\boxed{4}}=0$
1	1	$\frac{4\cdot 1-1\cdot 0}{\boxed{4}}=1$
0	$\boxed{4}$	0/4=0– pe linia cu pivotul elementul se împarte la pivot

a_5	a_1	a_5^{nou}
0	0	$\frac{4\cdot 0-0\cdot 1}{\boxed{4}}=0$
0	1	$\frac{4\cdot 0-1\cdot 1}{\boxed{4}}=-0{,}25$
1	$\boxed{4}$	1/4=0,25– pe linia cu pivotul elementul se împarte la pivot

b	a_1	b^{nou}
50	0	$\frac{4\cdot 50-0\cdot 150}{\boxed{4}}=50$
50	1	$\frac{4\cdot 50-1\cdot 150}{\boxed{4}}=12{,}5$
150	$\boxed{4}$	150/4=37,5– pe linia cu pivotul elementul se împarte la pivot

- linia Z_j se completează astfel: $Z_j=C^B\cdot a_i$, adică:

$$C^B\cdot a_1=10\cdot 1+0\cdot 0+0\cdot 8=10$$
$$C^B\cdot a_2=10\cdot 0+0\cdot 0+8\cdot 1=8$$
$$C^B\cdot a_3=10\cdot 1+0\cdot 1+8\cdot(-1)=2$$
$$C^B\cdot a_4=10\cdot 0+0\cdot 1+8\cdot 0=0$$
$$C^B\cdot a_5=10\cdot 0+0\cdot(-0{,}25)+8\cdot 0{,}25=2$$
$$C^B\cdot b=10\cdot 50+0\cdot 12{,}5+8\cdot 37{,}5=800$$

- se calculează apoi diferența Z_j-C_j. Deoarece nu există o diferență (negativă) Z_j-C_j>0 **rezultă că s-a atins soluția optimă**;

Soluțiile problemei sunt:

a_1=50 sau se scrie x_1=50
a_2=37,5 sau se scrie x_2=37,5