

## 1.1 GENERATOARE SINCRONE

### 1.1.1 ASPECTE DE PRINCIPIU

Generatoarele care alimentează sistemele electroenergetice sunt, în imensă majoritate, generatoare sincrone (alternatoare) trifazate. Funcționarea generatoarelor sincrone este bazată pe interacțiunea între cele două câmpuri învârtitoare pe care le incumbă. Un câmp (inductor) este produs de înfășurarea rotorică, alimentată în c.c. și antrenată de turbină la viteza de sincronism. Celălalt câmp este produs în înfășurările statorice de către curenții induși. Sincronismul celor două câmpuri stabilește legătura între viteza de rotație a turbinei,  $n$  și frecvența curenților induși  $f$ :

$$f_{[Hz]} = \frac{\omega_{[rad/s]}}{2\pi} = \frac{p}{2\pi} \cdot \frac{\Omega_{[rad/s]}}{p} = \frac{p}{2\pi} \cdot \frac{2\pi \cdot n_{[rot/min]}}{60} = \frac{p \cdot n_{[rot/min]}}{60} \quad (1.1)$$

unde  $p$  este numărul de perechi de poli al mașinii,  $\Omega_{[rad/s]}$  și  $n_{[rot/min]}$  sunt vitezele rotorului exprimate în cele două unități de măsură europene curente.

Analiza detaliată a generatoarelor sincrone (tratată pe larg în literatura de specialitate) nu face obiectul prezentei lucrări. Aici se pun în evidență exclusiv elementele funcționale și de modelare necesare pentru a analiza comportarea și comanda acestora.

Astfel, privind generatoarele ca surse de putere activă și reactivă, se observă că prima poate fi modificată acționând asupra turbinei. Comenzile de modificare a puterii active sunt executate cu constantă de timp mare (comparativ cu constanta de timp a circuitului electric în care debitează). Deoarece pentru producerea puterii active se consumă combustibil, principiul conservării energiei stabilește bilanțul la nivel de perioadă / multiplu de perioadă a semnalului sinusoidal.

Puterea reactivă injectată de generatorul sincron se comandă mai rapid (cu constantă de timp, electrică, mult mai redusă) decât cea activă. Modificarea puterii reactive nu presupune consum de energie (dincolo de cea corespunzătoare pierderilor pe care le ocazionatează). De aceea „bilanțul” puterilor reactive exprimă în mod formal echilibrul schimburilor realizate între câmpurile electric / magnetic ale elementelor cu caracter capacitiv / inductiv.

### 1.1.2 ECUAȚIILE TENSIUNILOR

Modelul simplificat al mașinii sincrone se bazează pe următoarele ipoteze simplificatoare:

1. Înfășurările statorice sunt dispuse uniform și creează un câmp spațial sinusoidal pe periferia întrefierului.
2. Ancoșele statorice nu provoacă variații semnificative ale inductivităților rotorice în raport cu poziția rotorului.
3. Histerezisul magnetic este neglijabil.
4. Efectele saturației (magnetice) sunt neglijabile.

Pe baza acestor ipoteze, o mașină sincronă poate fi reprezentată ca un ansamblu de șase înfășurări ca în Figura 1.1. Circuitul statoric constă dintr-o înfășurare trifazată parcursă de curenți trifazați. Partea rotorică este formată din înfășurările de câmp (inductoare) și înfășurările de amortizare. Pentru înfășurările statorice se consideră pozitivi curenții orientați înspre mașină.

Ecuatiile t.e.m. statorice sunt:

$$\begin{aligned}
 e_a &= \frac{d\psi_a}{dt} - R_a \cdot i_a \\
 e_b &= \frac{d\psi_b}{dt} - R_b \cdot i_b \\
 e_c &= \frac{d\psi_c}{dt} - R_c \cdot i_c
 \end{aligned}
 \tag{1.2}$$

Fluxurile instantanee de cuplaj între fazele a, b și c se pot exprima cu:

$$\begin{aligned}
 \psi_a &= L_{aa} \cdot i_a - L_{ab} \cdot i_b - L_{ac} \cdot i_c + L_{aR} \cdot i_R + L_{aD} \cdot i_D + L_{aQ} \cdot i_Q \\
 \psi_b &= L_{ba} \cdot i_a - L_{bb} \cdot i_b - L_{bc} \cdot i_c + L_{bR} \cdot i_R + L_{bD} \cdot i_D + L_{bQ} \cdot i_Q \\
 \psi_c &= L_{ca} \cdot i_a - L_{cb} \cdot i_b - L_{cc} \cdot i_c + L_{cR} \cdot i_R + L_{cD} \cdot i_D + L_{cQ} \cdot i_Q
 \end{aligned}
 \tag{1.3}$$

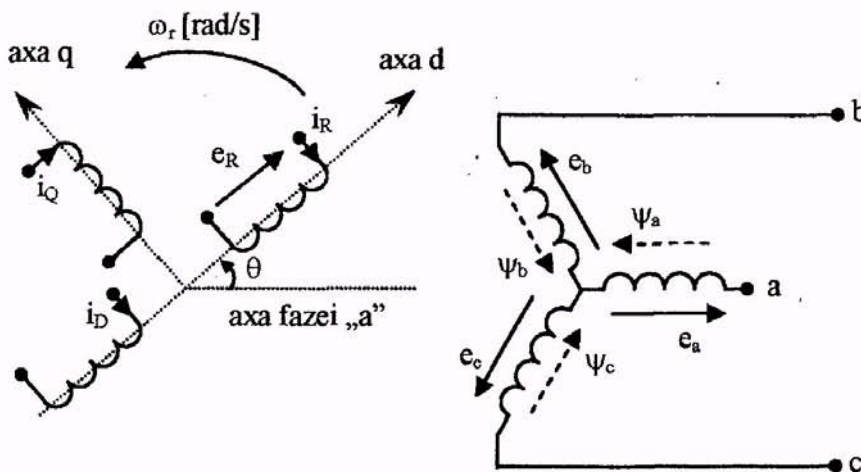
unde:  $L_{aa}, L_{bb}, L_{cc}$  sunt inductivităților proprii ale fazelor a, b, c;

$L_{ab}, L_{ac}, L_{bc}, L_{ba}, L_{ca}, L_{cb}$  sunt inductivități mutuale între înfășurările de fază statorice (a, b, c);

$L_{aR}, L_{bR}, L_{cR}$  sunt inductivități mutuale între înfășurările de fază statorice și înfășurarea inductoare;

$L_{aD}, L_{bD}, L_{cD}$  sunt inductivități mutuale între înfășurările de fază statorice și axa d;

$L_{aQ}, L_{bQ}, L_{cQ}$  sunt inductivități mutuale între înfășurările de fază statorice și axa q.



**Figura 1.1:** Circuitele statorice și rotorice ale unei mașini sincrone

a, b, c – fazele înfășurării statorice;

R – înfășurarea inductoare;

D – axa rotorică d;

Q – axa rotorică q;

$\theta$  [rad] - defazajul (în raport cu sensul de rotație stabilit de  $\omega_r$ ) între axa rotorică d și axa fazei statorice a;

$\omega_r$  [rad/s] – viteza unghiulară a rotorului

Ecuțiile tensiunilor rotorice sunt:

$$\begin{aligned}
 e_R &= \frac{d\psi_R}{dt} + R_R \cdot i_R \\
 0 &= \frac{d\psi_D}{dt} + R_D \cdot i_D \\
 0 &= \frac{d\psi_Q}{dt} + R_Q \cdot i_Q
 \end{aligned} \tag{1.4}$$

Fluxurile de cuplaj rotorice se pot exprima cu:

$$\begin{aligned}
 \psi_R &= L_{RR} \cdot i_R + L_{RD} \cdot i_D - L_{aR} \cdot i_a - L_{bR} \cdot i_b - L_{cR} \cdot i_c \\
 \psi_D &= L_{DR} \cdot i_R + L_{DD} \cdot i_D - L_{aD} \cdot i_a - L_{bD} \cdot i_b - L_{cD} \cdot i_c \\
 \psi_Q &= L_{QQ} \cdot i_Q - L_{aQ} \cdot i_a - L_{bQ} \cdot i_b - L_{cQ} \cdot i_c
 \end{aligned} \tag{1.5}$$

Ecuțiile (1.2) și (1.3), asociate statorului, împreună cu ecuațiile (1.4) și (1.5), asociate rotorului, descriu complet comportamentul electric al mașinii sincrone. Dacă mașina dispune de mai multe înfășurări rotorice în axele d și / sau q, pentru fiecare dintre ele se poate introduce, după caz, câte o ecuație în fiecare dintre sistemele de ecuații (1.4) și (1.5).

Faptul că inductivitățile proprii și mutuale ale înfășurărilor statorice variază cu poziția rotorului,  $q$ , care la rândul ei variază în timp, complică modelul mașinii sincrone, (1.2) ... (1.5). Variația acestor inductivități este un efect al variațiilor permeabilității liniilor câmpului magnetic (datorate neuniformității întrefierului). Fenomenul este mai pregnant pentru mașinile cu poli aparenti, la care permeabilitățile după cele două axe sunt semnificativ diferite. Chiar și pentru mașinile cu poli înecați apar diferențe între parametrii după cele două axe, datorită numărului mare de ancoșe ale înfășurării inductoare.

Inductivitățile proprii și mutuale ale circuitelor statorice sunt exprimabile cu:

$$\begin{aligned}
 L_{aa} &= L_{aa0} + L_{aa2} \cos 2\theta \\
 L_{bb} &= L_{aa0} + L_{aa2} \cos 2\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) \\
 L_{cc} &= L_{aa0} + L_{aa2} \cos 2\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \\
 L_{ab} &= L_{ba} = -L_{ab0} + L_{ab2} \cos 2\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) \\
 L_{bc} &= L_{cb} = -L_{ab0} + L_{ab2} \cos 2\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) \\
 L_{ca} &= L_{ac} = -L_{ab0} + L_{ab2} \cos 2\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right)
 \end{aligned} \tag{1.6}$$

### 1.1.3 TRANSFORMAREA PARK (dq0)

Faptul că inductivitățile proprii și mutuale nu sunt constante introduce complicații considerabile în rezolvarea problemelor legate de modelarea mașinii sincrone și sistemelor electroenergetice. O formă mai simplă, care oferă o imagine fizică mai clară se poate obține prin renunțarea la variabilele statorice și înlocuirea acestora cu altele, formale. Acesta este principiul transformării Park, [5], (dq0), definit de:

$$\begin{bmatrix} f_d \\ f_q \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} \cos \theta & \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \\ -\sin \theta & -\sin\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & -\sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_a \\ f_b \\ f_c \end{bmatrix} \quad (1.7)$$

unde  $\begin{bmatrix} f_a \\ f_b \\ f_c \end{bmatrix}$  sistemul trifazat de transformat (tensiuni sau curenți);

$\begin{bmatrix} f_d \\ f_q \\ 0 \end{bmatrix}$  sistemul trifazat echivalent (tensiuni sau curenți);

### Semnificația fizică a transformării Park

În regim permanent câmpul învârtitor produs de sistemul trifazat de înfășurări statorice rotește sincron cu rotor. De aceea, f.m.m. statorică, cu distribuție sinusoidală pe periferia rotorului, apare imobil în raport cu rotorul.

Deoarece o funcție sinusoidală poate fi exprimată ca o sumă de două funcții sinusoidale, f.m.m. statorică poate fi descompusă în două f.m.m. sinusoidale, imobile față de rotor, una având maximum în axa d iar cealaltă în axa q. De aceea variabila nou introdusă,  $i_d$ , poate fi interpretată ca fiind valoarea instantanee a curentului într-o înfășurare statorică *fictivă* care se învârtește la aceeași viteză cu rotorul și rămâne într-o poziție încât să corespundă cu axa d. Valoarea acestui curent este astfel încât să conducă la aceeași f.m.m. în axa d ca și înfășurările statorice reale.

F.m.m. datorate lui  $i_d$  și  $i_q$  sunt imobile față de rotor și liniile lor de câmp au permeabilitate constantă. De aceea *inductivitățile* corespunzătoare,  $L_d$  și  $L_q$  sunt constante.

Aplicând transformarea Park, definită de (1.7), ecuațiile mașinii sincrone în „coordonate” (variabile) pq0 se scriu sub forma:

$$\begin{aligned} e_d &= \frac{d\varphi_p}{dt} - \varphi_q \cdot \omega - R_a \cdot i_d \\ e_q &= \frac{d\varphi_q}{dt} - \varphi_p \cdot \omega - R_a \cdot i_q \\ e_0 &= \frac{d\varphi_0}{dt} - R_p \cdot i_0 \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$\begin{aligned} \psi_d &= -L_d \cdot i_d + L_{aR} \cdot i_R + L_{aD} \cdot i_D \\ \psi_q &= -L_q \cdot i_q + L_{aQ} \cdot i_Q \\ \psi_0 &= -L_0 \cdot i_0 \end{aligned} \quad (1.9)$$

unde:

$$\begin{aligned}
 L_p &= L_{aa0} + L_{ab0} + \frac{3}{2}L_{aa2} \\
 L_q &= L_{aa0} + L_{ab0} - \frac{3}{2}L_{aa2}
 \end{aligned}
 \tag{1.10}$$

$$L_0 = L_{aa0} - 2L_{ab0}$$

$$\begin{aligned}
 \psi_R &= L_{RR} \cdot i_R + L_{RD} \cdot i_D - \frac{3}{2}L_{aR} \cdot i_d \\
 \psi_D &= L_{RD} \cdot i_R + L_{DD} \cdot i_D - \frac{3}{2}L_{aD} \cdot i_d
 \end{aligned}
 \tag{1.11}$$

$$\psi_Q = L_{QQ} \cdot i_Q - \frac{3}{2}L_{aQ} \cdot i_q$$

Toate inductivitățile exprimate ca și componente „dq0” sunt constante (independente de poziția rotorului). Trebuie remarcat că  $i_0$  nu apare în ecuația fluxurilor mutuale rotorice – sistemul (1.11) – deoarece nu produce f.m.m. în întrefier.

Dacă transformarea „dq0” a făcut constante inductivitățile din (1.8) ... (1.11), inductivitățile mutuale stator – rotor au rămas variabile. Astfel, inductivitatea asociată fluxului de cuplaj între înfășurarea de câmp (inductoare) și curentul din axa statorică d este  $(3/2) \cdot L_{aR}$  în (1.11), în timp ce în (1.9) inductivitatea corespunzătoare fluxului prin înfășurarea statorică din axa d, datorat curentului inductor este  $L_{aR}$ . Această problemă poate fi rezolvată prin alegerea unor baze potrivite pentru mărimile rotorice și exprimarea acestora în unități relative.

#### 1.1.4 REPREZENTAREA ÎN UNITĂȚI RELATIVE

Este o obișnuință în practica inginerescă să se exprime mărimile în unități relative (normalizate). În acest fel calculele se simplifică (prin eliminare unităților) și exprimarea adimensională a mărimilor. Astfel:

$$X_{[ur]} = \frac{X_{[ua]}}{X_{baza[ua]}} \tag{1.12}$$

unde, evident, [u.r.] și [u.a.] semnifică unități relative și respectiv unități absolute.

Unele mărimile de bază pot fi alese independent și chiar arbitrar. Acestea sunt mărimile de bază independente. Altele (mărimile de bază dependente) decurg din primele, din ecuații fundamentale între respectivele categorii de mărimile<sup>2</sup>. Cel mai adesea mărimile de bază independente se aleg așa încât principalele variabile să ia valori cât mai apropiate de unu în regim nominal de funcționare.

În cazul mașinii sincrone mărimile de bază pot fi alese așa încât să de elimine constantele arbitrare și să se simplifice ecuațiile matematice (în special pentru a se putea construi circuite echivalente pe baza acestora). Dacă pentru mărimile statorice alegerea este evidentă:

<sup>2</sup> Exemplul cel mai cunoscut este cel în care în baza formată din patru mărimi (putere, tensiune, curent, impedanță) primele două sunt independente iar celelalte două rezultă din  $I = S/(\sqrt{3})U$  și respectiv  $X = U^2 / S$

- ✓  $e_{s,bază}$  → valoarea maximă a tensiunii de linie [V];
- ✓  $i_{s,bază}$  → valoarea maximă a curentului de linie [A];
- ✓  $f_{bază}$  → frecvența nominală [Hz]

pentru cele rotorice, aceasta necesită puțină precauție.

Valorile celorlalte mărimi folosite drept bază (de raportare) pentru calculul în unități relative rezultă din considerarea următoarelor corelații:

- pulsație →  $\omega_{baza} = 2\pi f_{baza}$  [rad/s] (1.13)

- viteză (mecanică) →  $\Omega_{baza} = \psi_{baza} \frac{2}{\pi f}$  [rad/s] (1.14)

- impedanțe →  $Z_{baza} = \frac{e_{baza}}{i_{baza}}$  [ $\Omega$ ] (1.15)

- inductivități →  $L_{baza} = \frac{e_{baza}}{\omega_{baza}}$  [H] (1.16)

- flux total →  $\psi_{baza} = L_{baza} \cdot i_{baza} = \frac{e_{baza}}{\Omega_{baza}}$  [Wb×sp](1.17)

- putere aparentă →  $S_{3f,baza} = 3 \cdot E_{ef,baza} \cdot I_{ef,baza} = \frac{3}{2} e_{s,baza} \cdot i_{s,baza}$  [VA] (1.18)

- cuplu →  $C_{baza} = \frac{S_{3f,baza}}{\Omega_{baza}}$  [Nm] (1.19)

- timp →  $t_{baza} = \frac{1}{\omega_{baza}} = \frac{1}{2\pi f_{baza}}$  [s] (1.20)

Ecuțiile tensiunilor în unități relative devin:

$$\begin{aligned} e_d &= \frac{d\psi_d}{dt} - \psi_q \cdot \omega - R_a \cdot i_d \\ e_q &= \frac{d\psi_q}{dt} - \psi_d \cdot \omega - R_a \cdot i_q \\ e_0 &= \frac{d\psi_0}{dt} - R_a \cdot i_0 \end{aligned} \quad (1.21)$$

Ecuțiile fluxurilor corespunzătoare sunt:

$$\begin{aligned} \psi_d &= -L_d \cdot i_d + L_{aR} \cdot i_R + L_{aD} \cdot i_D \\ \psi_q &= -L_q \cdot i_q + L_{aQ} \cdot i_Q \\ \psi_0 &= -L_0 \cdot i_0 \end{aligned} \quad (1.22)$$

Dacă frecvența mărimilor statorice (sinusoidale) este egală cu frecvența de bază reactanțele sunt egale cu inductivitățile

Mărimile de bază rotorice se aleg astfel încât să simplifice expresiile fluxurilor de cuplaj satisfăcând următoarele:

- În unități relative, inductivitățile mutuale între înfășurări trebuie să fie reciproce ( $L_{aR} = L_{Ra}$ ). Aceasta permite ca mașina sincronă să fie reprezentată printr-un circuit echivalent simplu.
- Toate inductivitățile mutuale între circuitele statorice și rotorice în fiecare axa trebuie să fie egale: exemplu  $L_{aR} = L_{aD}$ .

Aceste condiții revin la următoarele:

- pentru ca  $L_{RD} = L_{DR}$  trebuie ca:

$$e_{R,baza} \cdot i_{R,baza} = e_{D,baza} \cdot i_{D,baza}; \quad (1.23)$$

- pentru ca  $L_{aR} = L_{Ra}$  și  $L_{aQ} = L_{Qa}$  trebuie ca:

$$e_{D,baza} \cdot i_{D,baza} = \frac{3}{2} e_{s,baza} \cdot i_{s,baza}; \quad (1.24)$$

$$e_{Q,baza} \cdot i_{Q,baza} = \frac{3}{2} e_{s,baza} \cdot i_{s,baza}; \quad (1.25)$$

Se obțin următoarele ecuații pentru tensiunile și fluxurile rotorice:

$$\begin{aligned} e_R &= \frac{d\psi_R}{dt} + R_R \cdot i_R \\ 0 &= \frac{d\psi_D}{dt} + R_D \cdot i_D \end{aligned} \quad (1.26)$$

$$0 = \frac{d\psi_Q}{dt} + R_Q \cdot i_Q$$

$$\begin{aligned} \psi_R &= L_{RR} \cdot i_R + L_{RD} \cdot i_D - L_{Ra} \cdot i_a \\ \psi_D &= L_{DR} \cdot i_R + L_{DD} \cdot i_D - L_{Da} \cdot i_a \\ \psi_Q &= L_{QQ} \cdot i_Q + L_{Qa} \cdot i_Q \end{aligned} \quad (1.27)$$

Pe baza mărimilor astfel introduse, puterea instantanee la ieșirea mașinii sincrone se calculează cu:

$$p = e_d \cdot i_d + e_q \cdot i_q + 2 \cdot e_0 \cdot i_0 \quad (1.28)$$

iar cuplul se poate exprima cu:

$$c = \psi_d \cdot i_d - \psi_q \cdot i_q \quad (1.29)$$

### 1.1.5 MODELE CLASICE DE GENERATOARE SINCRONE

Ecuațiile generatorului sincron descrise în secțiunea precedentă sunt considerabil mai simple decât modelul descris în § 1.1.3. Cu toate acestea, modelul din § 1.1.4 nu este direct utilizabil decât în sistemele mici (conținând doar câteva generatoare). Modelul nu este aplicabil, spre exemplu, pentru studiile de stabilitate. Pentru a-l adapta unor asemenea scopuri modelul trebuie și mai mult simplificat.

Pentru sistemele cu număr mare de generatoare este necesară introducerea de ipoteze simplificatoare. Adesea se recurge la neglijarea:

- ✓ efectul de transformator (tensiunile induse de  $\dot{\psi}_d$  și  $\dot{\psi}_q$ ) și
- ✓ efectul variațiilor de viteză.

Astfel ecuațiile mașinii (1.21), (1.22), (1.26) și (1.27) conduc la:

$$\begin{aligned} e_d &= -\dot{\psi}_q - R_a \cdot i_a \\ e_q &= \dot{\psi}_d - R_a \cdot i_a \\ e_R &= p \cdot \psi_R + R_R \cdot i_R \end{aligned} \quad (1.30)$$

$$\begin{aligned} \psi_d &= -L_d \cdot i_d + L_{ad} \cdot i_R \\ \psi_q &= -L_q \cdot i_q \\ \psi_R &= -L_{ad} \cdot i_d + L_{RR} \cdot i_R \end{aligned} \quad (1.31)$$

Definind variabilele:

$$\begin{aligned} E_i &= L_{ad} \cdot i_R \\ E'_q &= \frac{L_{ad}}{L_{RR}} \psi_R \\ E_R &= \frac{L_{ad}}{R_R} e_R \\ T'_{d0} &= \frac{L_{RR}}{R_R} \end{aligned} \quad (1.32)$$

ecuațiile mașinii devin:

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_d &= -L_d \cdot \dot{i}_d + E_i \\ \dot{\psi}_q &= -L_q \cdot \dot{i}_q \\ E'_q &= E_i - (L_d - L'_d) \dot{i}_d \\ E'_q &= \frac{1}{T'_{d0}} (E_R - E_i) \end{aligned} \quad (1.33)$$

unde  $E'_q$  este componenta în axa q a tensiunii din spatele reactanței tranzitorii  $x'_d$ ;

$T'_{d0}$  este constanta de timp (gol);

$E_i$  este f.e.m. proporțională cu curentul inductor  $i_R$ ;

$e_R$  este tensiunea proporțională cu  $E_R$ .

Deoarece în unități relative  $x_d = L_d$  (când frecvența statorică este egală cu  $f_{basa}$ ), se obține:

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_d &= -x_d \cdot \dot{i}_d + E_i \\ \dot{\psi}_q &= -x_q \cdot \dot{i}_q \\ E'_q &= E_i - (x_d - x'_d) \dot{i}_d \\ \dot{E}'_q &= \frac{1}{T'_{d0}} (E_R - E_i) \end{aligned} \quad (1.34)$$

Pentru analiza fenomenelor rapide (de durată redusă comparativ cu  $T'_{d0}$ ) modelul mașinii este adesea simplificat presupunând  $E'_q$  constantă (pe toată durata studiului). Această ipoteză

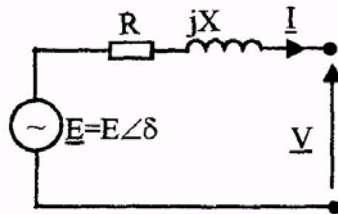


elimină unică ecuație diferențială electrică a mașinii (ultima ecuație din (1.34)). Dacă se neglijează anizotropia mașinii după în raport cu cele două axe, presupunând că  $x'_d = x'_q$ , modelul mașinii se poate simplifica și mai mult. Astfel se presupune că fluxul de cuplaj rămâne constant.

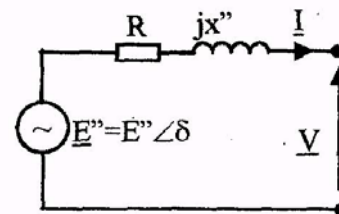
Cu aceste aproximații tensiunea din spatele impedanței tranzitorii,  $R_a + j \cdot x'_d$ , rămâne constantă. Circuitul echivalent care rezultă este prezentat în Figura 1.2.a Tensiunea la bornele mașinii este reprezentată prin fazorul:

$$\underline{V} = \underline{E} - (R + jX) \cdot I \quad (1.35)$$

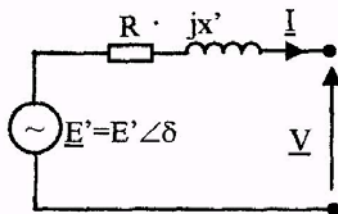
unde, pentru simplificare, s-au introdus notațiile  $R = R_a$  și  $X = x'_d$ .



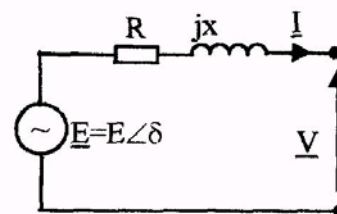
a) generică ( $R = R_a$  și  $X = x'_d$ )



b) subtranzitorie ( $x'' = x''_d = x''_q$ )



c) tranzitorie ( $x' = x'_d = x'_q$ )



d) staționară ( $x = x_d = x_q$ )

Figura 1.2: Scheme echivalente pentru un generator sincron fără anizotropie ( $x'_d = x'_q$ )

Schema echivalentă de principiu din Figura 1.2.a poate fi reluată pentru diferite orizonturi de timp modificând exclusiv anumiți parametri (t.e.m. și reactanța mașinii) - Figura 1.2.b ... d. Modelele subtranzitoriu și tranzitoriu presupun constante fluxurile de cuplaj rotorice iar cel de regim permanent corespunde curent de sarcină constant. Toate aceste modele neglijează anizotropia mașinii (pentru a simplifica la maximum modelul).

Oricum în regim tranzitoriu (de exemplu cel declanșat de producerea unui scurtcircuit) ipoteza este încă și mai aproape de realitate decât în regim permanent. Astfel, la scurtcircuit rezistența circuitului de sarcină al generatorului scade la o valoare neglijabilă. De aceea curentul statoric este aproape în cuadratură cu tensiunea (în urma acesteia). În consecință, la scurtcircuit valoarea reactanței mașinii este preponderentă în axa directă (d).

Pe durata unui scurtcircuit componenta alternativă a curentului scade de la o valoare inițială (imediat după producerea scurtcircuitului) foarte mare la valoarea de regim staționar (de 3...7 ori mai mică). Această evoluție se explică prin modificarea reactanței mașinii sub efectul reacției indusului. Imediat înainte de producerea scurtcircuitului statorul și rotorul sunt cuplate de un flux în axa directă datorat:

- ✓ exclusiv f.m.m. rotorice dacă anterior scurtcircuitului generatorul funcționa în gol;
- ✓ f.m.m. rotorice și statorice dacă înainte de producerea scurtcircuitului generatorul era în sarcină (înfășurările statorice erau parcurse de curenți nenuli).

La scurtcircuit curenții statorici cresc dramatic. Fluxul de cuplaj stator - rotor nu se poate modifica în salt (datorită curenților turbionari rotorici și din înfășurările de amortizare, care se opun). Deoarece în primul moment nici o reacție de indus nu se opune f.m.m. statorice, reactanța rotorică este neglijabilă. Prin urmare reactanța inițială este foarte redusă (comparabilă cu reactanța de scăpări,  $X_f$ ).

Pe măsură ce curenții turbionari din înfășurarea de amortizare și eventual din inductor scad, reacția indusului crește. Această reacție, produsă de un curent aproape pur reactiv are efect predominant demagnetizant și reactanța mașinii crește către reactanța sincronă în axa directă.

Făcând o analogie între înfășurările de câmp + de amortizare și secundarul unui transformator, al cărui primar este înfășurarea statorică, se poate dezvolta o analiză calitativă a evoluției tranzitorii a reactanței mașinii sincrone.

În regim permanent normal de funcționare nu se manifestă efectul de transformator între înfășurările statorică și rotorică deoarece cele două câmpuri rotesc sincron (la viteza de sincronism). Cazul este similar cu cel al unui transformator în gol. În aceste condiții mașina este descrisă de reactanța sincronă,  $X_d$ .

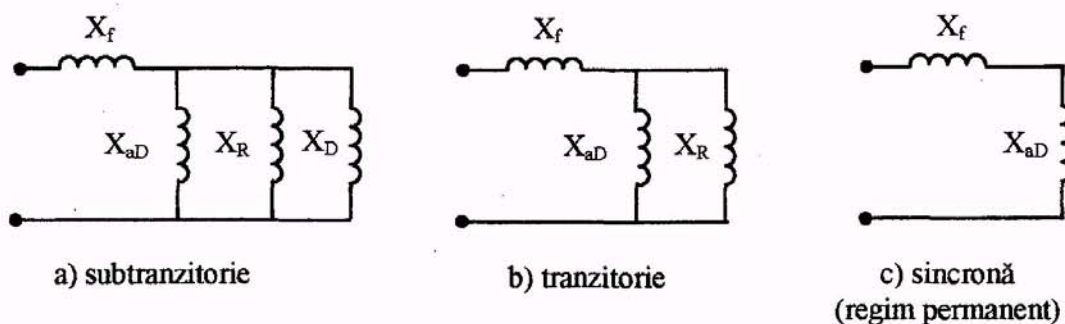
În timpul scurtcircuitului rotorul nu se mai învârti sincron cu câmpul învârtitor statoric și apare efectul de transformator. Inductorul și înfășurările de amortizare sunt ca două secundare în scurtcircuit. Circuitul echivalent, în aceste condiții, văzut din stator, est prezentat în Figura 1.3.a. Neglijând rezistențele, se obține reactanța echivalentă, denumită **reactanță subtranzitorie în axa d** (la scurtcircuit):

$$x_d'' = X_f + \frac{1}{\frac{1}{X_{aD}} + \frac{1}{X_R} + \frac{1}{X_D}} \quad (1.36)$$

Dacă, în modelul din Figura 1.3, se introduce și rezistența înfășurărilor de amortizare,  $R_k$ , se poate obține **constanta de timp subtranzitorie în axa d** (la scurtcircuit):

$$T_d'' = \frac{x_d''}{R_k} = \frac{X_f + \frac{1}{\frac{1}{X_{aD}} + \frac{1}{X_R} + \frac{1}{X_D}}}{R_k} \quad (1.37)$$

În relația precedentă reactanțele sunt exprimate în unități relative, ele sunt egale cu inductivitățile corespunzătoare.



**Figura 1.3:** Circuite echivalente ale mașinii sincrone, corespunzătoare diferitelor intervale de studiu

Deoarece, în general circuitul de amortizare are o rezistență considerabilă, constanta de timp subtranzitorie este foarte mică (tipic 0,035 s). De aceea componenta subtranzitorie se amortizează rapid și ramura corespunzătoare înfășurării de amortizare din Figura 1.3.a dispare, obținându-se echivalentul din Figura 1.3.b, căruia îi corespunde **reactanța tranzitorie în axa d** (la scurtcircuit):

$$x'_d = X_f + \frac{1}{\frac{1}{X_{ad}} + \frac{1}{X_R}} \quad (1.38)$$

Dacă în echivalentul din Figura 1.3.b se introduce rezistența inductorului,  $R_R$ , se poate calcula **constanta de timp tranzitorie în axa d** (la scurtcircuit):

$$T'_d = \frac{x'_d}{R_R} = \frac{X_f + \frac{1}{\frac{1}{X_{ad}} + \frac{1}{X_R}}}{R_R} \quad (1.39)$$

Constanta de timp care caracterizează amortizarea cu satorul în gol este cunoscută drept **constantă de timp tranzitorie în axa d în gol** (folosită în (1.26) și (1.27)):

$$T'_{d0} = \frac{X_R}{R_R} \quad (1.40)$$

Între  $T'_d$  și  $T'_{d0}$  se stabilește relația:

$$T'_d = \frac{x'_d}{x_d} T'_{d0} \quad (1.41)$$

În finalul evoluției tranzitorii viteza rotorului redevine sincronă, efectul de transformator (stator - rotor) dispare și circuitul echivalent se prezintă ca în Figura 1.3.c. Reactanța corespunzătoare este reactanța sincronă în axa d:

$$x_d = X_f + X_{ad} \quad (1.42)$$

Similar se pot identifica reactanțele și constantele de timp în cealaltă axa (q). Valorile obținute ( $x''_q$ ,  $x'_q$  și  $x_q$ ) se folosesc pentru scurtcircuite având factor de putere redus și pentru care reacția indusului nu este exclusiv în axa d.

Valorile tipice ale parametrilor evocați ai mașinii sincrone sunt prezentate în Tabelul 1.1.

**Tabelul 1.1:** Valorile tipice ale reactanțelor și constantelor de timp ale mașinilor sincrone [6]

Parametru			Hidrogenatoare	Turbogeneratoare
Reactanțe sincrone	$x_d$	u.r.	0,6 ... 1,5	1,0 ... 2,3
	$x_q$	u.r.	0,4 ... 1,0	1,0 ... 2,3
Reactanțe tranzitorii	$x'_d$	u.r.	0,2 ... 0,5	0,15 ... 0,4
	$x'_q$	u.r.		0,3 ... 1,0
Reactanțe subtranzitorii	$x''_d$	u.r.	0,15 ... 0,35	0,12 ... 0,25
	$x''_q$	u.r.	0,20 ... 0,45	0,12 ... 0,25

Parametru			Hidrogenatoare	Turbogeneratoare
Constante de timp tranzitorii	$T'_{d0}$	s	1,5 ... 9,0	3,0 ... 10,0
	$T'_{q0}$	s		0,5 ... 2,0
Constante de timp subtranzitorii	$T''_{d0}$	s	0,01 ... 0,05	0,02 ... 0,05
	$T''_{q0}$	s	0,01 ... 0,09	0,02 ... 0,05
Reactanța de scăpări statorică	$X_f$	u.r.	0,1 ... 0,2	0,1 ... 0,2
Rezistența statorică	$R_a$	u.r.	0,002 ... 0,02	0,0015 ... 0,005

### 1.1.6 CAPACITATEA DE ÎNCĂRCARE CU PUTERE REACTIVĂ

Una dintre caracteristicile funcționale care trebuie avute în vedere la utilizarea generatoarelor sincrone este capacitatea de încărcare cu putere reactivă și de aici limitări în încărcarea cu putere activă (deoarece puterea aparentă este cea care definește limita de funcționare a mașinii). Aspectul este important atât pentru exploatarea mașinii în regim staționar (atunci când este folosită pentru reglarea tensiunii prin injecție de reactiv - § 3), dar mai ales în studiile de stabilitate (a sincronismului și a tensiunii).

Generatoarele sincrone sunt proiectate pentru o anumită putere aparentă la un anumit factor de putere (în general 0,85 ... 0,9 inductiv). Puterea activă este limitată de capacitatea turbinei la o valoare sub puterea aparentă (putere aparentă  $\times$  factor de putere). La rândul ei, puterea reactivă pe care o poate asigura generatorul sincron este limitată de trei considerente:

- limita curenților statorici;
- limita curentului de excitație;
- limita termică a capetelor de înfășurări.

#### Limita curenților statorici

Curenții statorici produc pierderi Joule ( $R \cdot I^2$ ) care trebuie evacuate pentru a evita ca temperatura înfășurărilor să crească peste valoarea corespunzătoare clasei de izolație. Această precauție definește o limită asupra puterii aparente (căreia îi corespund curenții statorici).

Dacă se notează cu  $S_{max}$  această putere aparentă, ea definește un semicerc de rază  $S_{max}$  în planul P - Q (celălalt semicerc corespunde motorului sincron) după cum se observă în Figura 1.4.

#### Limita curentului de excitație

Limita de evacuare a căldurii produse prin efect Joule de curentul inductor stabilește o a doua restricție asupra încărcării generatorului sincron. Pentru a identifica locul geometric definit de această limită se neglijează anizotropia mașinii (se consideră  $X_d = X_q = X_s$ ). Schemei echivalente din Figura 1.2.a îi corespunde diagrama fazorială din Figura 1.5. Exprimând t.e.m. în funcție de curentul de excitație, se obțin următoarele relații pentru puteri:

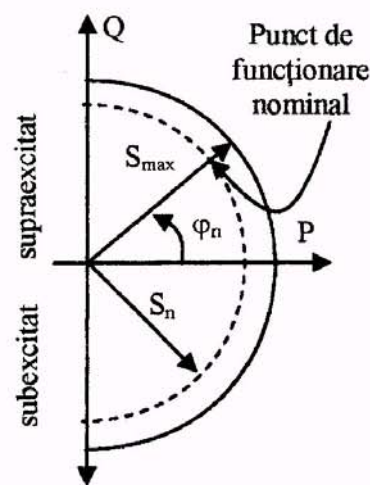


Figura 1.4: Limita curenților statorici

$$P = U \cdot I \cdot \cos \varphi = \frac{X_{ad}}{X_s} U \cdot i_R \cdot \sin \delta \quad (1.43)$$

$$Q = U \cdot I \cdot \sin \varphi = \frac{X_{ad}}{X_s} U \cdot i_R \cdot \cos \delta - \frac{U^2}{X_s} \quad (1.44)$$

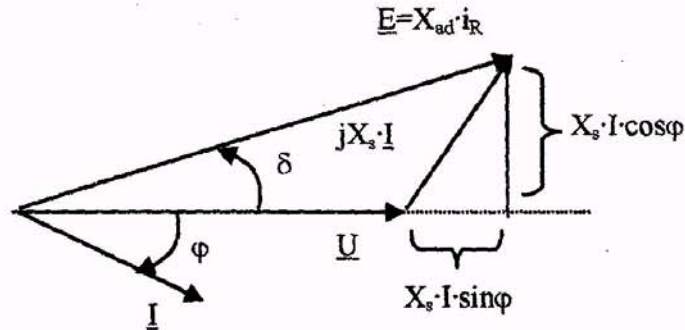


Figura 1.5: Diagrama fazorială a modelului simplificat de mașină sincronă

Ecuțiile (1.43) și (1.44) descriu un cerc de rază  $(X_{ad}/X_s) \cdot U \cdot i_R$ , având centrul pe axa imaginară, în punctul de coordonate  $(0, -U^2/X_s)$ , după cum se observă în Figura 1.6.

Pentru orice mașină corect proiectată punctul de intersecție între cele două cercuri este cel corespunzător regimului de funcționare nominal (puterea aparentă nominală și factorul de putere nominal).

#### Limita termică a zonelor frontale

Încălzirea localizată a zonelor frontale limitează capacitatea de încărcare a mașinii sincrone în regim subexcitat.

Fluxul de scăpări al capetelor de bobină iese / intră perpendicular pe muchiile frontale statorice, ceea ce produce curenți turbionari în tole și o încălzire localizată în zona capetelor de bobină (Figura 1.7).

În regim supraexcitat (curent de excitație ridicat) inelul de siguranță este saturat și fluxul de scăpări este redus. În regim subexcitat (curent de excitație redus) inelul de siguranță este nesaturat și permite creșterea fluxului de scăpări la marginea statorului [7].

În plus, în regim subexcitat fluxul produs de curenții statorici se însumează cu fluxul produs de curentul inductor. Astfel fluxul capetelor de spire întărește fluxul axial în zona frontală ceea ce provoacă o încălzire care limitează sever capacitatea de încărcare, în special pentru mașinile cu poli înecați. Această limitare este ilustrată în Figura 1.8.

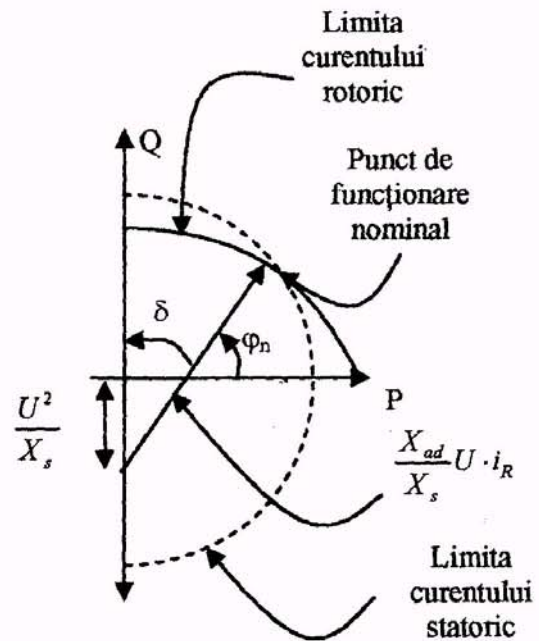


Figura 1.6: Limitele curentului rotoric

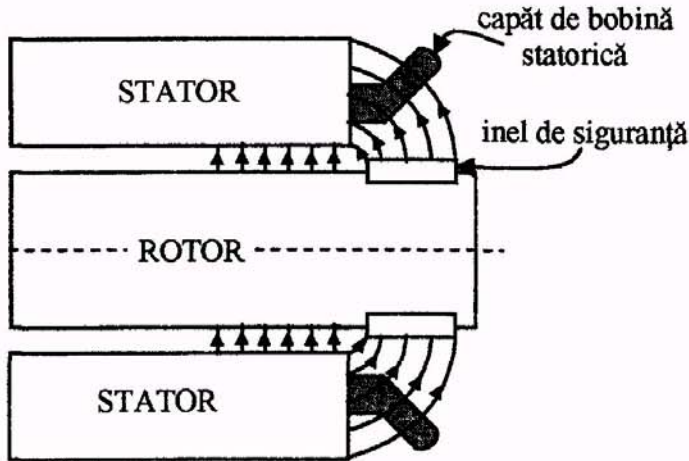


Figura 1.7: Secțiune prin zona frontală a mașinii sincrone

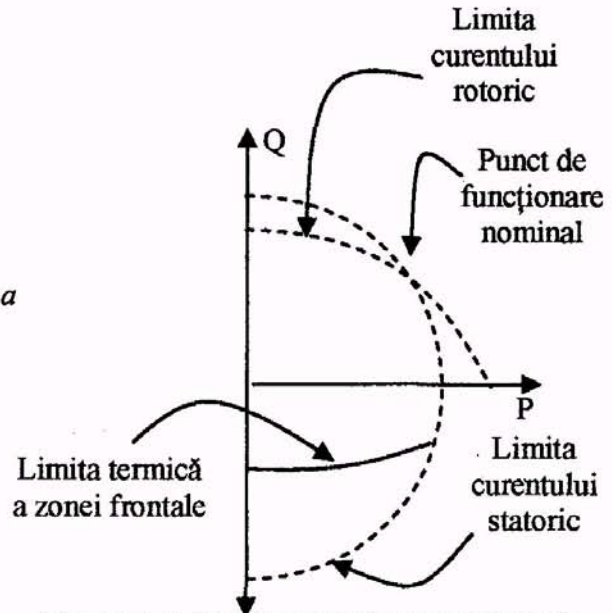


Figura 1.8: Limita termică a zonei frontale

### 1.1.7 CURBELE ÎN V (MORDEY)

Caracterizează dependența între curentul de sarcină (statoric) și curentul de excitație (inductor) pentru tensiune de ieșire, putere activă constantă. Aceste curbe sunt prezentate generic în Figura 1.9 pentru trei puteri active.

În Figura 1.9 s-a reprezentat cu linii punctate locurile geometrice ale punctelor de funcționare având același factor de putere. Aceste curbe indică modul în care trebuie comandat curentul de excitație pentru a menține constant factorul de putere al mașinii.

Cele trei limitări ale capacității de încărcare ale generatoarelor sincrone sunt de asemenea prezentate în Figura 1.9

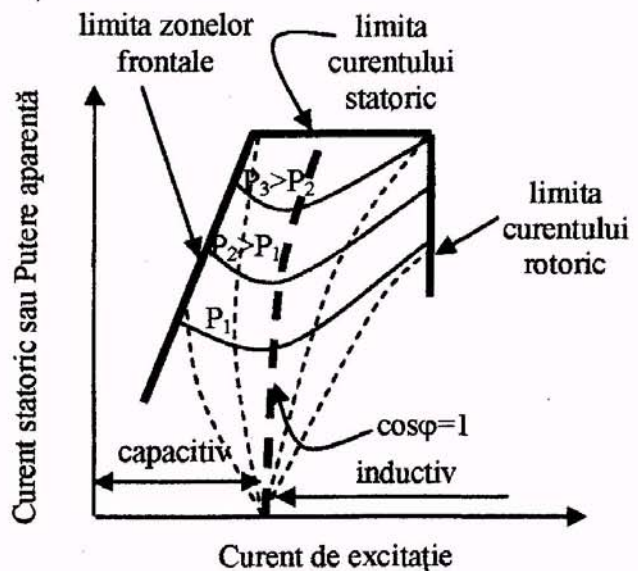


Figura 1.9: Curbele în V ale generatorului sincron

## 1.2 CONSUMATORI

În studiile de sistem reprezentarea individuală a consumatorilor electrici:

- de iluminat (lămpi cu incandescență sau fluorescente);
- de încălzire / răcire (instalații de climatizare);
- motoare electrice (asincrone, sincrone);
- instalații industriale (cuptoare, compresoare, etc.);
- ș.a.m.d;

este inefficientă. La această scară este indispensabilă agregarea consumatorilor. Acestei practici i-au fost dedicate eforturi consistente din partea celor mai repute instituții: EPRI (patru rapoarte între 1979 și 1993), CIGRE (raport în 1990), IEEE (raport din 1995).

Au fost astfel stabilite clase de consumatori (de exemplu industrial, rezidențial, comercial, agricol, etc.). Pentru fiecare clasă consumatorul echivalent (agregat) poate fi descris prin factorul de putere, dependența puterilor de tensiune și frecvență ( $P(U,f)$  și  $Q(U,f)$ ), tipul și caracteristicile consumatorilor mai importanți înglobați (de putere mai mare și care ar putea necesita o reprezentare mai detaliată).

În această secțiune se analizează exclusiv modelele statice ale consumatorilor. Aceste modele redau dependența puterilor activă și reactivă de tensiune și frecvență. Cel mai adesea cele două dependențe sunt exprimate separat:

$$P = k_p \cdot U^{m_U} \cdot f^{m_f} \quad (1.45)$$

$$Q = k_Q \cdot U^{n_U} \cdot f^{n_f} \quad (1.46)$$

unde  $k_p$  și  $k_Q$  sunt constante dependente de valorile nominale ale puterilor, tensiunii și frecvenței. Pentru funcționarea în regim permanent la frecvența nominală este uzual ca cele două puteri să fie caracterizate cu:

$$P = P_0 \cdot \left( \frac{U}{U_0} \right)^a \quad (1.47)$$

$$Q = Q_0 \cdot \left( \frac{U}{U_0} \right)^b \quad (1.48)$$

unde indicele 0 desemnează valoarea inițială sau cea de referință (cel mai adesea valoarea nominală).

Sarcinile statice sunt afectate puțin de modificările de frecvență, ceea ce poate fi pus în evidență cu  $m_f = n_f = 0$ . Dacă se dorește modelarea sarcinilor prin impedanțe constante, în dependența de tensiune trebuie folosiți exponenții  $m_U = n_U = 2$ .

O modelare mai precisă este deosebit de importantă în special pentru consumatorii sensibili la variațiile de tensiune. Figura 1.10 prezintă caracteristicile (putere și curent) pentru cele trei tipuri de modele adoptabile:

- putere constantă;
- curent constant;
- impedanță constantă.

Diferite analize efectuate pe acest subiect propun valori ale coeficienților în raport de tipul (clasa) sarcinii (Tabelul 1.2) sau natura consumatorului (Tabelul .3).

**Tabelul 1.1:** Exponenții din relațiile (1.45) și (1.46) în funcție de clasa consumatorului [6]

Tip consumator	$m_U$	$m_f$	$n_U$	$n_f$
Complex	0,6 ... 1,5	0,7 ... 1,2	-0,6 ... 0	1 ... 2
Casnic	0,5	1,0 ... 1,5	-0,7	1,0 ... 1,4
Comercial	-0,185	1,2	-0,488	1,17
Industrial	-	0,7 ... 1,5	-	1 ... 2

**Tabelul 1.2:** Exponenții din relațiile (1.45) și (1.46) în funcție de natura consumatorului [8]

Tip consumator	$m_U$	$n_U$	$m_f$	$n_f$
Lămpi cu incandescență	1,6	0	0	0
Lămpi fluorescente	1,2	3,0	-1,0	-2,8
Încălzire electrică	2,0	0	0	0
Motoare cu inducție la jumătate din sarcina nominală	0,2	1,6	1,5	-0,3
Motoare cu inducție la sarcină nominală	0,1	0,6	2,8	1,8
Cuptor cu arc	1,9	2,1	-0,5	0
Fabrică de aluminiu	1,8	2,2	-0,3	0,6

Caracteristicile din Tabelul 1.3 pot fi agregate pentru a construi caracteristicile agregate ale consumatorilor racordați în fiecare nod. Spre exemplu, pentru un grup de  $n$  consumatori de puteri individuale  $P_j$ , coeficienții caracteristicilor agregate se determină cu:

$$m_{U,ech} = \frac{\sum_{j=1}^n m_{U,j} \cdot P_j}{\sum_{j=1}^n P_j} \quad (1.49)$$

$$m_{f,ech} = \frac{\sum_{j=1}^n m_{f,j} \cdot P_j}{\sum_{j=1}^n P_j} \quad (1.50)$$

$$n_{U,ech} = \frac{\sum_{j=1}^n n_{U,j} \cdot P_j}{\sum_{j=1}^n P_j} \quad (1.51)$$



$$n_{f,ech} = \frac{\sum_{j=1}^n n_{f,j} \cdot P_j}{\sum_{j=1}^n P_j} \quad (1.52)$$

Un alt model, larg utilizat, propus ca alternativă la modelele precedente avansează dependențe de tip polinomial:

$$P = P_0 \left[ p_1 \cdot \left( \frac{U}{U_0} \right)^a + p_2 \cdot \left( \frac{U}{U_0} \right) + p_3 \right] \quad (1.53)$$

$$Q = Q_0 \left[ q_1 \cdot \left( \frac{U}{U_0} \right)^b + q_2 \cdot \left( \frac{U}{U_0} \right) + q_3 \right] \quad (1.54)$$

Acest model este cunoscut ca model **ZIP** deoarece ponderează (prin coeficienții  $p_{1..3}$ ,  $q_{1..3}$ ) caracteristicile unei reprezentări prin impedanță constantă (**Z**), curent constant (**I**) și putere constantă (**P**).

Dacă parametrii  $m_U$  și  $n_U$  sunt subunitari (exemplu: motoare) pot apărea probleme de reprezentare la tensiuni scăzute, deoarece la scăderea tensiunii curentul modelat de (1.53) și (1.54) nu scade corespunzător. În cazul extrem (teoretic) în care tensiunea ar scădea la zero, consumatorul ar continua să absoarbă un curent nenul, ceea ce este nerealist pentru un model static (nedinamic).

Aceasta arată limitele modelului: nu este riguros decât în jurul tensiunii nominale (când tensiunea este controlată și menținută într-o plajă admisă strânsă:  $\pm 5\%$ ). La tensiuni scăzute pot apărea erori inacceptabile de reprezentare a curenților și fazelor. Dacă modelul este folosit în proceduri iterative convergența poate fi serios afectată.

*Pentru a evita aceste inconveniente, la tensiuni scăzute (spre exemplu sun 0,8 u.r.) este preferabilă reprezentarea consumatorilor prin impedanțe constante. Parametrii fundamentali ai modelului compus din ecuațiile (1.47) și (1.48) sunt exponenții  $a$  și  $b$ . Valoarea caracterizează tipul de model:*

- 0 pentru putere constantă;
- 1 pentru curent constant;
- 2 pentru impedanță constantă.

Pentru sarcini compozite valorile lor se stabilesc în funcție de caracteristicile agregate componentelor.

Modelul ZIP exprimă caracterizează dependența puterilor de tensiune. Dependența de frecvență poate fi exprimată prin multiplicarea cu un factor liniar dependent de frecvență a dependențelor de tensiune:

- exponențială în (1.47) și (1.48)

$$P = P_0 \left( \frac{U}{U_0} \right)^a \cdot (1 + k_{ff} \cdot \Delta f) \quad (1.55)$$

$$Q = Q_0 \left( \frac{U}{U_0} \right)^b \cdot (1 + k_{gf} \cdot \Delta f) \quad (1.56)$$

- sau polinomială pentru ZIP – relațiile (1.53) și (1.54)

$$P = P_0 \left[ p_1 \cdot \left( \frac{U}{U_0} \right)^a + p_2 \cdot \left( \frac{U}{U_0} \right) + p_3 \right] \cdot (1 + k_{gf} \cdot \Delta f) \quad (1.57)$$

$$Q = Q_0 \left[ q_1 \cdot \left( \frac{U}{U_0} \right)^b + q_2 \cdot \left( \frac{U}{U_0} \right) + q_3 \right] \cdot (1 + k_{gf} \cdot \Delta f) \quad (1.58)$$

unde  $\Delta f = f - f_0$  este abaterea de frecvență ( $f_0$  - frecvența de consemn / nominală).

### 1.3 COMPONENTE ALE REȚELOR ELECTRICE

Dintr-o perspectivă topologică, rețelele electrice, atât cele de transport cât și cele de distribuție, reprezintă ansambluri de laturi și noduri. Laturile sunt materializate de linii electrice (aerene și în cablu) și transformatoare electrice. Nodurile sunt sistemele de bare ale stațiilor și posturilor de transformare.

Între rețelele de transport și cele de distribuție există diferențe semnificative de topologie (cele de transport fiind buclate iar cele de distribuție radiale), constructive, de echipament și de fenomenologie. Dând la o parte elementele care le deosebesc, ele pot fi caracterizate unitar prin modele matriceale construite pe baza modelelor individuale ale elementelor componente.

În această secțiune, după o succintă trecere în revistă a modelelor de linii și transformatoare electrice, se prezintă modul de construire a matricelor de rețea, baza modelelor în puteri folosite în studiile de sistem (electroenergetic).

#### 1.3.1 MODELE DE LINII ELECTRICE

Liniile electrice sunt caracterizate prin parametri:

- longitudinali (rezistență și inductanță) și
- transversali: conductanță (pierderi corona pentru LEA de ÎT sau pierderi în dielectric pentru LEC) și susceptanță (capacitivă).

Cu cât lungimea liniei crește, cu atât tendința de supravoltare în gol și la sarcini reduse crește. Fenomenul (efect Feranti) vizează funcționarea și deci modelarea liniilor de transport (în rețelele de distribuție tensiunile nominale și lungimile liniilor sunt mult mai reduse).

În raport cu acest fenomen se utilizează modele (în general scheme echivalente<sup>3</sup> în  $\Pi$  și  $T$ ) stabilite în raport de lungimea liniei<sup>4</sup>: pentru linii scurte ( $L < 80$  km), de lungime medie ( $80 \text{ km} <$

<sup>3</sup> Există și posibilitatea, utilizării de scheme echivalente în  $\Gamma$ , însă acestea au dezavantajul asimetriei (nu le corespund cuadripoli reciproci simetrici).

$L < 250$  km) și lungi ( $L > 250$  km). Aceste limite sunt concordante cu constatările funcționale – Figura 1.10 (curba St. Clair).

### Modele de linii scurte

În acest caz, parametrii transversali sunt neglijați. Linia poate fi reprezentată monofilar printr-o latură longitudinală (circuit R-L serie) în planul tensiunii nominale a liniei, așa cum se observă în Figura 1.11. Parametrii R și L se obțin prin înmulțirea parametrilor specifici (corespunzători) cu lungimea liniei, adică:  $R = r \cdot l$ ,  $X = x \cdot l$ .

Neglijând parametrii transversali, curenții la capetele liniei sunt egali:

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_2 \quad (1.59)$$

iar tensiunea la ieșirea liniei se exprimă cu:

$$\underline{U}_2 = \underline{U}_1 + \underline{Z} \cdot \underline{I}_2 \quad (1.60)$$

Cuadripolul echivalent (Figura 1.12), verifică ecuația:

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{A} & \underline{B} \\ \underline{C} & \underline{D} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix} \quad (1.61)$$

coeficienții fiind:

$$\begin{aligned} \underline{A} &= \underline{D} = 1 \\ \underline{B} &= \underline{Z} = R + jX \\ \underline{C} &= 0 \end{aligned} \quad (1.62)$$

Alternativ la (1.61) se poate scrie modelul nodal (dependența curenți nodali – tensiuni nodale):

$$\begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Y} & -\underline{Y} \\ -\underline{Y} & \underline{Y} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix} \quad (1.63)$$

unde  $\underline{Y} = \frac{1}{R + jX}$  este admitanța longitudinală a liniei. (1.64)

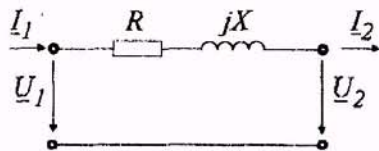


Figura 1.11: Schema echivalentă a liniilor scurte

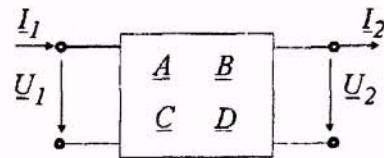


Figura 1.12: Cuadripolul echivalent

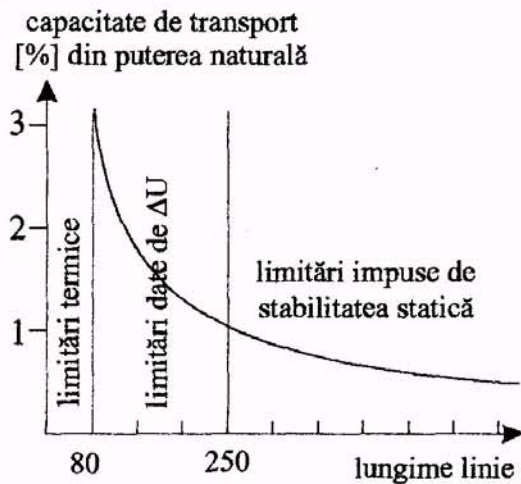


Figura 1.10: Curba St. Clair

<sup>4</sup> Pragurile indicate care definesc lungimea liniei, corespund unei frecvențe nominale de 50Hz și corespund respectiv la  $80\text{km} \cong \lambda/75$  și  $250\text{km} \cong \lambda/2$ , unde  $\lambda$  este lungimea de unda la 50Hz, adică  $6000\text{km}$ .

## Modele de linii de lungime medie

Pe măsură ce lungimea liniei crește curenții transversali capacitivi devin semnificativi. Pentru modelarea acestora este necesară includerea în model a capacităților transversale. Aceste linii cu lungime sub 250 km, pot fi reprezentate prin scheme echivalente cu parametri concentrați, în T,  $\Pi$  sau  $\Gamma$ . Sunt preferate schemele în  $\Pi$ , Figura 1.13, sau T, Figura 1.14, simetrice (cu jumătate din admitanța transversală la capătul dinspre sursă și cealaltă jumătate la capătul de ieșire), deoarece permit dezvoltarea de cuadripoli echivalenți.

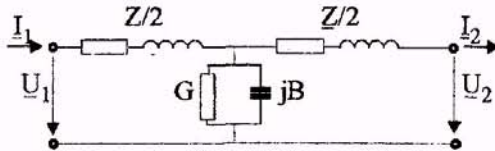


Figura 1.13: Schema în T

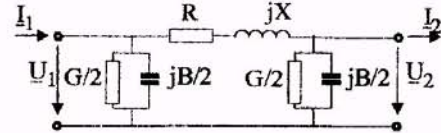


Figura 1.14: Schema în  $\Pi$

Parametri cuadripolului echivalent sunt:

- pentru schema în T:

$$\underline{A}_T = 1 + \frac{\underline{Z} \cdot \underline{Y}}{2} ; \underline{B}_T = \underline{Z} \left( 1 + \frac{\underline{Z} \cdot \underline{Y}}{4} \right) ; \underline{C}_T = \underline{Y} ; \underline{D}_T = 1 + \frac{\underline{Z} \cdot \underline{Y}}{2} \quad (1.65)$$

- pentru schema în  $\Pi$

$$\underline{A}_\Pi = 1 + \frac{\underline{Z} \cdot \underline{Y}}{2} ; \underline{B}_\Pi = \underline{Z} ; \underline{C}_\Pi = \underline{Y} \left( 1 + \frac{\underline{Z} \cdot \underline{Y}}{4} \right) ; \underline{D}_\Pi = 1 + \frac{\underline{Z} \cdot \underline{Y}}{2} \quad (1.66)$$

Se observă că în ambele versiuni cuadripolii sunt simetrici:

$$\underline{A} = \underline{D} \quad (1.67)$$

și reciproci:

$$\underline{A} \cdot \underline{D} - \underline{B} \cdot \underline{C} = 1 \quad (1.68)$$

Mărimile de ieșire ale liniei se exprimă în raport cu cele de intrare cu:

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{D} & -\underline{B} \\ -\underline{C} & \underline{A} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \end{bmatrix} \quad (1.69)$$

Ecuția matriceală nodală pentru schema în  $\Pi$  este:

$$\begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left( \frac{G}{2} + j \frac{B}{2} \right) + \frac{1}{R + jX} & -\frac{1}{R + jX} \\ -\frac{1}{R + jX} & \left( \frac{G}{2} + j \frac{B}{2} \right) + \frac{1}{R + jX} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix} \quad (1.70)$$

## Modele de linii lungi

La liniile de lungime mare curenții la intrarea și ieșirea liniei nu sunt egali (intensitatea curentului transportat nu este aceeași în orice secțiune a liniei). Tensiunea și curentul în acest caz variază în raport cu timpul și cu poziția față de capătul liniei (dependențe sinusoidale). Pentru a pune în evidență asemenea variații modelul include ecuații cu derivate parțiale.

Un asemenea model se poate reduce la o schemă echivalentă în T,  $\Pi$  (asemănătoare cu cele din Figurile 1.13 și 1.14. În Figura 1.15 se exemplifică schema în  $\Pi$ , pentru care ecuația nodală (de această dată în impedanțe) este:

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{Z' \cdot Y'}{2} & Z' \\ \frac{Y'}{2} \cdot \left( 1 + \frac{Z' \cdot Y'}{4} \right) & 1 + \frac{Z' \cdot Y'}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_2 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad (1.71)$$

cu

$$Z' = Z_c \cdot \sinh \gamma \cdot l = Z_c \cdot \frac{\sinh \gamma \cdot l}{\gamma \cdot l} = Z_c \cdot \frac{\sinh \sqrt{Z \cdot Y}}{\sqrt{Z \cdot Y}} = k_1 \cdot Z \quad (1.72)$$

$$Y' = \frac{1}{Z_c} \tanh \frac{\gamma \cdot l}{2} = \frac{Y}{2} \cdot \frac{\tanh \frac{\gamma \cdot l}{2}}{\frac{\gamma \cdot l}{2}} = \frac{Y}{2} \cdot \frac{\tanh \frac{\sqrt{Z \cdot Y}}{2}}{\frac{\sqrt{Z \cdot Y}}{2}} = k_2 \cdot \frac{Y}{2} \quad (1.73)$$

Coefficienții  $k_1$  și  $k_2$  sunt cunoscuți drept coeficienții Kennelly. Dacă din seriile funcțiilor hiperbolice se rețin doar primii trei termeni, așa cum a propus Weedy [1],  $k_1$  și  $k_2$  se calculează cu:

$$k_1 \cong 1 + \frac{Z \cdot Y}{6} \quad (1.74)$$

$$k_2 \cong \frac{1 + \frac{Z \cdot Y}{12}}{k_1} \quad (1.75)$$

Pentru linii cu lungimea sub 500 km, aproximația (1.74), (1.75) introduce erori sub 1,2 %.

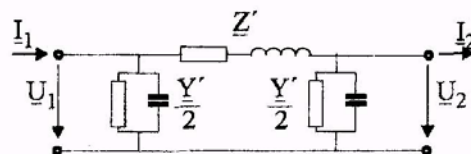


Figura 1.15: Schema echivalentă în  $\Pi$  a unei linii lungi

### 1.3.2 MODELE DE TRANSFORMATOARE ELECTRICE

Transformatoarele electrice folosite în rețelele electrice pentru adaptarea tensiunii la valorile transportului / distribuției / utilizării energiei electrice sunt de o mare diversitate. Majoritatea transformatoarelor de putere folosite în rețelele electrice sunt prevăzute cu prize de reglaj (în gol sau în sarcină) pentru a putea fi folosite la reglarea tensiunii și /prin controlul circulației de putere reactivă.

Când raportul de transformare este redus se folosesc autotransformatoare. Transmițând o parte din energie galvanic și o parte prin inducție, la aceste transformatoare, cel mai adesea în conexiune stea cu neutrul legat la pământ, se sacrifică izolarea galvanică<sup>5</sup> dintre cele două zone

<sup>5</sup> Pentru că acest tip de transformatoare sunt foarte permissive, în scopul reducerii perturbațiilor și în special a dezechilibrelor și armonicilor triple aceste transformatoare sunt prevăzute cu o a treia înfășurare conectată în triunghi. Adesea, pe barele acestei a treia înfășurare se prevăd și elemente de compensare (bobine sau condensatoare).

de rețea pe care le leagă pentru a reduce gabaritul și costul echipamentului, pentru a crește eficiența și pentru a ușura reglajul de tensiune.

În rețele de transport, puternic buclate, două sau mai multe transformatoare se pot regăsi în aceeași buclă. În acest caz reglajul de tensiune este restricționat de necesitatea de a asigura condițiile de funcționare în „pseudoparalel” între ramurile buclei (exemplu în Figura 1.16). Această precauție evită circulația de putere reactivă în buclă. Pe de altă parte, dacă (unele dintre) transformatoare permit și realizarea unui reglaj transversal, se poate controla circulația de putere activă în buclă (transferul de putere reactivă între rețele).

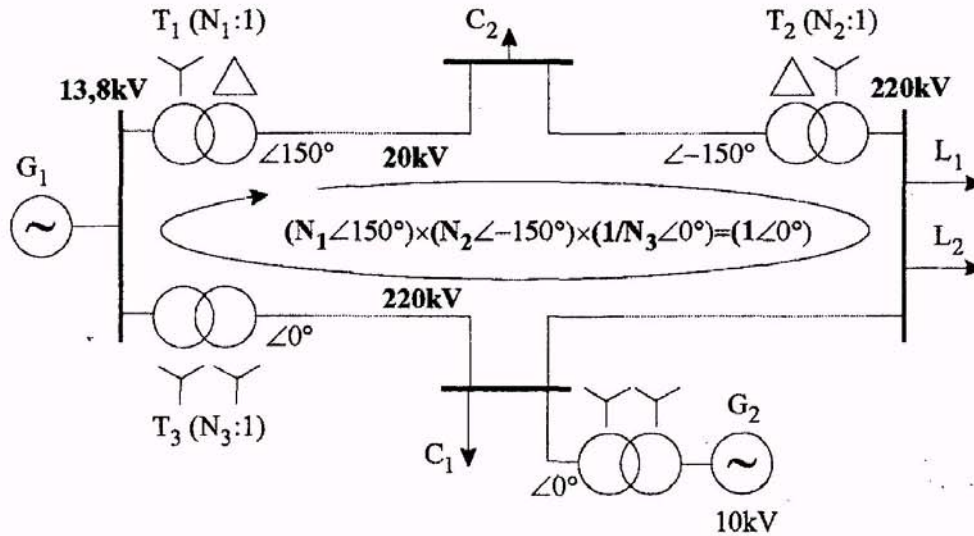


Figura 1.16: Transformatoare în buclă (produsul rapoartelor de transformare unitar)

În scopul identificării unui model suficient de general pentru a fi integrat într-un model matriceal global, în această analiză, ca și pentru liniile electrice, se scot în evidența elementele comune acestor transformatoare.

### 1.3.2.1 Modele de transformatoare cu două înfășurări

Dacă transformatorul (sau autotransformatorul) permite exclusiv reglajul longitudinal<sup>6</sup> atunci el poate fi caracterizat simplificat printr-un raport de transformare real,  $1:N$  și o admitanță  $y_{ik}$  longitudinală (de scurtcircuit  $y_{ik}$ ), ca în Figura 1.17.a.

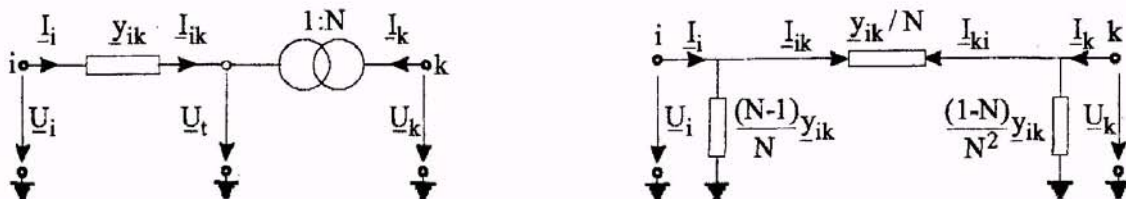


Figura 1.17: a) Transformator monofazat

b) Schema echivalentă în  $\pi$  a transformatorului monofazat

<sup>6</sup> Spre deosebire de un transformator de reglaj longitudinal, un transformator cu reglaj longo-transversal trebuie caracterizat printr-un raport de transformare complex  $1:\underline{N} = 1:N\angle\varphi$ , unde  $\varphi$  modelează reglajul transversal (defazajul introdus).

Circuitul său echivalent, reprezentat în Figura 1.17.b, este descris de ansamblul de ecuații:

$$\frac{\underline{U}_i}{\underline{U}_k} = 1:N \Rightarrow \underline{U}_i = \underline{U}_k/N \quad (1.76)$$

$$\underline{I}_i = \underline{I}_{ik} = \underline{y}_{ik}(\underline{U}_i - \underline{U}_k) = \frac{N-1}{N} \underline{y}_{ik} \cdot \underline{U}_i + \frac{\underline{y}_{ik}}{N} \cdot (\underline{U}_i - \underline{U}_k) \quad (1.77)$$

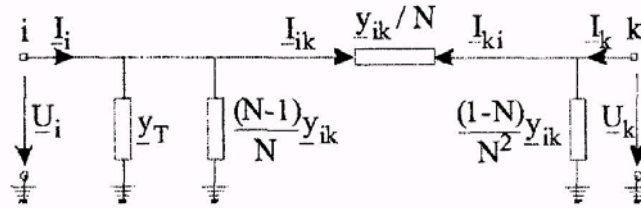
$$\underline{U}_i \cdot \underline{I}_{ik}^* = \underline{U}_k \cdot \underline{I}_k^* \Rightarrow \underline{I}_k = -\underline{I}_{ik} \cdot \frac{\underline{U}_i}{\underline{U}_k} = -\frac{\underline{I}_{ik}}{N} \quad (1.78)$$

$$\underline{I}_k = \frac{\underline{y}_{ik}}{N} \cdot \underline{U}_i - \frac{\underline{y}_{ik}}{N^2} \cdot \underline{U}_k = \frac{(1-N)}{N^2} \underline{y}_{ik} \cdot \underline{U}_k + \frac{\underline{y}_{ik}}{N} \cdot (\underline{U}_i - \underline{U}_k) \quad (1.79)$$

Aceste ecuații pot fi regrupate în modelul matriceal nodal:

$$\begin{bmatrix} \underline{I}_i \\ \underline{I}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{y}_{ik} & -\frac{\underline{y}_{ik}}{N} \\ -\frac{\underline{y}_{ik}}{N} & \frac{\underline{y}_{ik}}{N^2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{I}_i \\ \underline{I}_k \end{bmatrix} \quad (1.80)$$

Dacă se dorește considerarea pierderilor în miez și a curentului de magnetizare, se poate introduce în nodul i parametru corespunzător,  $\underline{y}_T$ , după cum se observă în Figura 1.18.



**Figura 1.18:** Schema echivalentă în  $\pi$  a transformatorului monofazat cu considerarea parametrilor transversali

Modelului din Figura 1.18, i se poate scrie asocia ecuația matriceală nodală:

$$\begin{bmatrix} \underline{I}_i \\ \underline{I}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{y}_{ik} + \underline{y}_T & -\frac{\underline{y}_{ik}}{N} \\ -\frac{\underline{y}_{ik}}{N} & \frac{\underline{y}_{ik}}{N^2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{I}_i \\ \underline{I}_k \end{bmatrix} \quad (1.81)$$

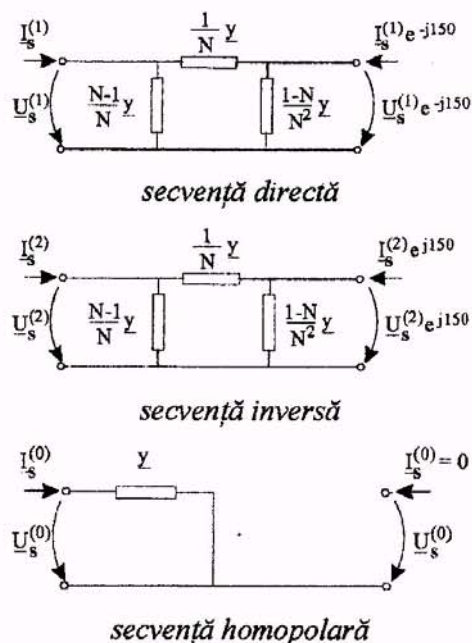
Pentru transformatoarele cu reglaj longo-transversal raportul de transformare devine complex. Conform aceleiași proceduri (ecuațiile (1.76) ... (1.79), dar cu  $N \rightarrow \underline{N} = N \angle \varphi$ ) se obține modelul nodal cu ramură transversală inclusă (corespondentul modelului (1.81));

$$\begin{bmatrix} \underline{I}_i \\ \underline{I}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{y}_{ik} + \underline{y}_T & -\frac{\underline{y}_{ik}}{\underline{N}} \\ -\frac{\underline{y}_{ik}}{\underline{N}^*} & \frac{\underline{y}_{ik}}{N^2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{I}_i \\ \underline{I}_k \end{bmatrix} \quad (1.82)$$

Trebuie remarcat că pentru transformatoarele trifazate raportul de transformare este dependent de grupa de conexiuni. Astfel, deoarece raportul de transformare reflectă raportul între mărimile corespondente (ex.: tensiuni de fază) primare și secundare, atunci când una dintre înfășurări este în conectată în stea iar cealaltă în triunghi, raportul de numerele de spire trebuie corectat cu un factor  $\sqrt{3}$ , iar faza mărimilor pe partea înfășurării conectate în triunghi trebuie corectată cu  $(n \times 30)^\circ$ , unde  $n$  este indicele orar al grupe de conexiuni. În Figura 1.19 se prezintă schemele echivalente de secvență (directă, inversă și homopolară) pentru un transformator cu grupa de conexiuni  $Y_n d5$ .

Ecuțiile matriceale terminale ale schemelor echivalente de secvență din Figura 1.19 sunt:

$$\begin{bmatrix} \underline{I}_p^{(1)} \\ \underline{I}_s^{(1)} \cdot e^{-j150} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{y} & -\frac{\underline{y}}{N} \\ -\frac{\underline{y}}{N} & \frac{\underline{y}}{N^2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_p^{(1)} \\ \underline{U}_s^{(1)} \cdot e^{-j150} \end{bmatrix} \quad (1.83)$$



**Figura 1.19:** Schemele echivalente de secvență pentru un transformator trifazat cu grupă de conexiuni  $Y_n d5$

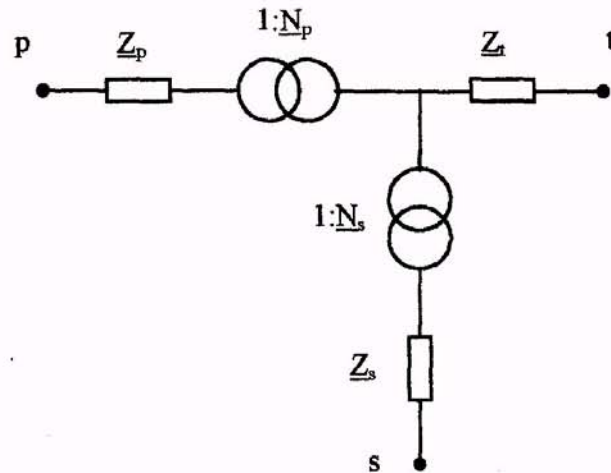
$$\begin{bmatrix} \underline{I}_p^{(2)} \\ \underline{I}_s^{(2)} \cdot e^{j150} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{y} & -\frac{\underline{y}}{N} \\ -\frac{\underline{y}}{N} & \frac{\underline{y}}{N^2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_p^{(2)} \\ \underline{U}_s^{(2)} \cdot e^{j150} \end{bmatrix} \quad (1.84)$$

$$\begin{bmatrix} \underline{I}_p^{(0)} \\ \underline{I}_s^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{y} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_p^{(0)} \\ \underline{U}_s^{(0)} \end{bmatrix} \quad (1.85)$$

### 1.3.2.2 Modele de transformatoare cu trei înfășurări

Figura 1.20 prezintă o reprezentare schematică a unui transformator cu trei înfășurări, în care ramura transversală este omisă (ea se introduce de aceeași manieră ca și pentru transformatoarele cu două înfășurări). Punctul comun al stelei este fictiv și în consecință nelegat la neutrul sistemului.





**Figura 1.20:** Schema de principiu a transformatoarelor cu trei înfășurări

Cele trei înfășurări au puteri nominale diferite (în funcție de transferul de putere între înfășurări prevăzută la proiectare). Cu toate acestea, dacă se dezvoltă modelul în unități relative, parametrii în unități relative trebuie exprimați în raport cu baze care folosesc aceeași putere.

Rezultatele probelor de scurtcircuit pentru perechile de înfășurări permit conduc la impedanțele între perechile de borne: primar - secundar ( $\underline{Z}_{ps}$ ), primar - terțiar ( $\underline{Z}_{pt}$ ) și secundar - terțiar ( $\underline{Z}_{st}$ ). Știind că:

$$\underline{Z}_{ps} = \underline{Z}_p + \underline{Z}_s \quad (1.86)$$

$$\underline{Z}_{pt} = \underline{Z}_p + \underline{Z}_t \quad (1.87)$$

$$\underline{Z}_{st} = \underline{Z}_s + \underline{Z}_t \quad (1.88)$$

se pot determina impedanțele individuale ale celor trei înfășurări:

$$\underline{Z}_p = \frac{1}{2}(\underline{Z}_{ps} + \underline{Z}_{pt} - \underline{Z}_{st}) \quad (1.89)$$

$$\underline{Z}_s = \frac{1}{2}(\underline{Z}_{ps} + \underline{Z}_{st} - \underline{Z}_{pt}) \quad (1.90)$$

$$\underline{Z}_t = \frac{1}{2}(\underline{Z}_{pt} + \underline{Z}_{st} - \underline{Z}_{ps}) \quad (1.91)$$

Pentru transformatoare mari  $\underline{Z}_s$  poate avea valori reduse sau poate fi chiar negativă.

Se observă că un transformator cu trei înfășurări poate fi redus la un ansamblu de două transformatoare cu două înfășurări și o impedanță, conectate în stea (ca în Figura 1.20) sau în triunghi și al căror model este analizat în § 1.3.2.1.

## 1.4 MODELE GLOBALE DE REȚEA

Pentru fiecare dintre componentele de rețea analizate în § 1.3 au fost puse în evidență modelele nodale corespunzătoare. Exprimând dependența între tensiunile și curenții nodali, aceste modele sunt de tip echivalent terminal, deoarece pun în corespondență mărimile de intrare

– ieșire, folosind pentru aceasta volumul minim de informații topologice și parametrice, recurgând uneori la echivalenți<sup>7</sup>.

Plecând de la o asemenea reprezentare uniformă, modelele componentelor de rețea se integrează într-un model multiport global: matricea admitanțelor nodale,  $[Y_{nod}]$  în (1.92), sau matricea impedanțelor nodale,  $[Z_{nod}]$  în (1.93):

$$[U_{nod}] = [Y_{nod}] \cdot [I_{nod}] \quad (1.92)$$

$$[U_{nod}] = [Z_{nod}] \cdot [I_{nod}] \quad (1.93)$$

#### 1.4.1 FORMULAREA ÎN MĂRIMI NODALE

Se consideră o rețea cu  $(n+1)$ , dintre care unul este nodul de referință, marcat ca nod 0. Fiecare nod, împreună cu nodul 0, formează câte un port. Ca urmare, în total sunt  $n$  porturi.

Fiecărui port  $i$  se asociază un sens de referință: curentul și tensiunea se asociază după regula de la generator (rețeaua se consideră pasivă), iar tensiunea este pozitivă dacă potențialul nodului este superior celui al nodului 0 (Figura 1.21). Acest multiport poate fi caracterizat prin modelele nodale (1.92) sau (1.93). Spre exemplu, pentru o rețea cu  $3+1$ (nodul de referință) noduri, aceste ecuații devin:

$$\begin{cases} I_1 = Y_{11} \cdot U_1 + Y_{12} \cdot U_2 + Y_{13} \cdot U_3 \\ I_2 = Y_{21} \cdot U_1 + Y_{22} \cdot U_2 + Y_{23} \cdot U_3 \\ I_3 = Y_{31} \cdot U_1 + Y_{32} \cdot U_2 + Y_{33} \cdot U_3 \end{cases} \quad (1.94)$$

$$\text{și } \begin{cases} U_1 = Z_{11} \cdot I_1 + Z_{12} \cdot I_2 + Z_{13} \cdot I_3 \\ U_2 = Z_{21} \cdot I_1 + Z_{22} \cdot I_2 + Z_{23} \cdot I_3 \\ U_3 = Z_{31} \cdot I_1 + Z_{32} \cdot I_2 + Z_{33} \cdot I_3 \end{cases} \quad (1.95)$$

#### 1.4.2 IMPEDANȚE NODALE

Dacă în nodul 1 se injectează curentul  $I_1$  iar celelalte noduri sunt lăsate în gol. Impedanțele  $Z_{i1}$ , ( $i=1, 2, 3$ ) se calculează pe baza tensiunilor față de nodul 0 ale celorlalte noduri,  $U_i$ , ( $i=1, 2, 3$ ) cu:

$$Z_{i1} = \frac{U_i}{I_1}, (i=1, 2, 3) \quad (1.96)$$

Similar se obțin parametrii celorlalte coloane ale lui  $[Z_{nod}]$ , excitând succesiv fiecare nod cu un curent cunoscut și lăsându-le în gol pe toate celelalte. Din perspectiva acestei proceduri, termenul de parametri de mers în gol este pe deplin justificat.

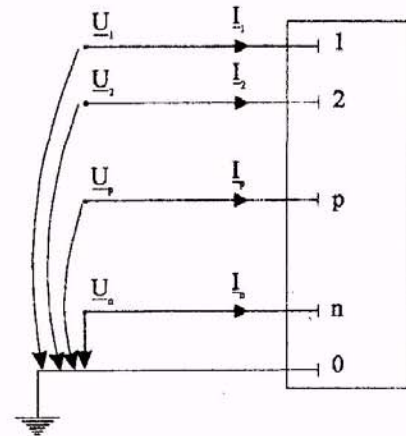


Figura 1.21: Reprezentarea rețelei  $n$ -port, în mărimi nodale

<sup>7</sup> Exemplu: cazul modelului cu parametri concentrați / schema în  $\Pi$  – Figura 1.15, folosind coeficienții Kennelly (relațiile (1.72) ... (1.75)).

### 1.4.3 ADMITANȚE NODALE

Să presupunem că în nodul 1 se aplică o tensiune  $\underline{U}_1$  (față de nodul 0) și celelalte noduri se scurtcircuitează la nodul 0. Măsurând toți curenții nodali  $\underline{I}_i$ , ( $i = 1, 2, 3$ ), parametri  $\underline{Y}_{i1}$ , ( $i = 1, 2, 3$ ) se calculează cu:

$$\underline{Y}_{i1} = \frac{\underline{I}_i}{\underline{U}_1}, (i = 1, 2, 3) \quad (1.97)$$

Ceilalți parametri se calculează analog. și în acest caz se remarcă denumirea justificată de admitanțe de scurtcircuit.

### 1.4.4 FORMAREA MATRICEI ADMITANȚELOR NODALE

Pentru o rețea pasivă, relația matriceală între curenții și tensiunile laturilor este:

$$[\underline{I}_{lat}] = [\underline{y}_{lat}] \cdot [\underline{V}_{lat}] \quad (1.98)$$

Căderea de tensiune pe laturi poate fi exprimată în funcție de tensiunile nodale (la capetele laturii) cu:

$$[\underline{U}_{lat}] = [A]^T \cdot [\underline{U}_{nod}] \quad (1.99)$$

unde  $[A]$  este matricea de incidență laturi - noduri. Acesta este o matrice de dimensiuni  $n \times l$  ( $n$  numărul de laturi și  $l$  numărul de noduri) care are ca elemente:

- $(a_{ij})_a = +1$  când latura de pe coloana  $j$  este incidentă în nodul ce definește linia  $i$  și latura "părăsește" nodul;
- $(a_{ij})_a = -1$  când latura de pe coloana  $j$  este incidentă în nodul ce definește linia  $i$  și latura "intră" în nod;
- $(a_{ij})_a = 0$  când latura de pe coloana  $j$  nu este incidentă în nodul ce definește linia  $i$ .

O relație similară cu (1.99) se poate scrie și pentru legătura între curenții de latură și nodali:

$$[A] \cdot [\underline{I}_{lat}] = [\underline{I}_{nod}] \quad (1.100)$$

Înlocuind (1.99) în (1.98) se obține:

$$[\underline{I}_{lat}] = [\underline{y}] \cdot [A]^T \cdot [\underline{U}_{nod}] \quad (1.101)$$

Multiplucând (1.101) la stânga cu  $[A]$  și folosind (1.100) se găsește:

$$[\underline{I}_{nod}] = \underbrace{[A] \cdot [\underline{y}] \cdot [A]^T}_{[\underline{Y}_{nod}]} \cdot [\underline{U}_{nod}] = [\underline{Y}_{nod}] \cdot [\underline{U}_{nod}] \quad (1.102)$$

$$\text{unde } [\underline{Y}_{nod}] = [A] \cdot [\underline{y}] \cdot [A]^T \quad (1.103)$$

este matricea admitanțelor nodale din (1.92). Relația (1.103) sugerează modalitatea de a construi direct și rapid matricea  $[A]$ .

Admitanța "proprie" a unui nod oarecare,  $i$ , reprezintă suma admitanțelor tuturor laturilor  $ij$  (între două noduri active sau între un nod activ și , incidente în nodul  $i$  :

$$\underline{Y}_{ii} = \sum \underline{y}_{ij} \quad (1.104)$$

Admitanța "reciprocă" între nodul  $i$  și nodul  $j$  este obținută prin schimbarea semnelui admitanței echivalente a ansamblului de laturi incidente în nodurile  $i$  și  $j$ . Pentru rețelele reale, între două noduri nu se află decât o singură linie (eventual dublu circuit), sau două linii în paralel. Dacă  $\underline{y}_{ij}$  reprezintă admitanța liniei sau a ansamblului paralel de linii între nodurile  $i$  și  $j$ , atunci:

$$\underline{Y}_{ij} = -\underline{y}_{ij} \quad (1.105)$$

După cum s-a văzut în §1.3.2, pentru transformatoarele defazoare (exemplu cele care dispun și de reglaj transversal) nu există schemă echivalentă (simplă) în  $\Pi$ . Dacă nodurile sunt indiciate ca în Figura 1.18, acestea se introduc în  $[\underline{Y}_{nod}]$  după cum urmează:

- adăugând  $\underline{y}_{Tj} + \underline{y}_{ik}$  la suma care definește  $\underline{Y}_{ii}$ ;
- adăugând  $\frac{\underline{y}_{ik}}{N^2}$  la suma care definește  $\underline{Y}_{kk}$ ;
- introducând  $\underline{Y}_{ik} = \frac{-\underline{y}_{ik}}{N}$  sau, dacă mai sunt și alte laturi între nodurile  $i$  și  $k$ , adăugând  $\frac{-\underline{y}_{ik}}{N}$  la suma care definește  $\underline{Y}_{ik}$ ;
- introducând  $\underline{Y}_{ki} = \frac{-\underline{y}_{ik}}{N^*}$  sau, dacă mai sunt și alte laturi între nodurile  $i$  și  $k$ , adăugând  $\frac{-\underline{y}_{ik}}{N^*}$  la suma care definește  $\underline{Y}_{ki}$ .

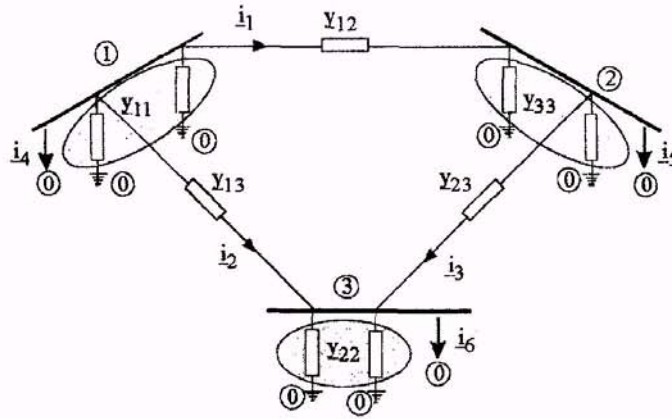
În lipsa cuplajelor mutuale între elementele care materializează laturile de rețea, matricea  $[\underline{Y}_{nod}]$  poate fi completată direct, prin "inspectarea" rețelei (avantaj care face ca matricea  $[\underline{Y}_{nod}]$  să fie folosită ori de câte ori este posibil).

Un alt avantaj al acestei matrice este că include un număr în general redus de elemente nenule. Caracterul spart (rar) al acestei matrice este o consecință a faptului că într-o rețea reală fiecare nod este legat cu foarte puține noduri (în general nu mai mult de două sau trei). Aceasta face ca pe fiecare linie sau coloană a lui  $[\underline{Y}_{nod}]$  să se afle cel mult trei sau patru elemente nenule<sup>8</sup>.

Dacă rețeaua nu conține transformatoare cu reglaj transversal, iar parametrii sunt exprimați în unități relative la baze locale, matricea  $[\underline{Y}_{nod}]$  este simetrică.

În rețelele cu cuplaj mutuale între elementele primare, dacă influența cuplajului nu este resorbită în parametrii proprii (ci se exprimă prin admitanțe), construirea lui  $[\underline{Y}_{nod}]$  prin "inspecție" nu mai este posibilă. Ea se obține în urma aplicării relației (4.103).

<sup>8</sup> Acesta constituie o caracteristică generală și nu o regulă. Nu este exclus ca în buclate un nod să fie legat cu mai mult de două sau trei noduri.



**Figura 1.22: Rețea cu trei noduri**

Pentru rețeaua din Figura 1.22, relația (1.98) se scrie:

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_1 \\ \dot{i}_2 \\ \dot{i}_3 \\ \dot{i}_4 \\ \dot{i}_5 \\ \dot{i}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{y}_{12} & & & & & \\ & \underline{y}_{13} & & & & \\ & & \underline{y}_{23} & & & \\ & & & \underline{y}_{11} & & \\ & & & & \underline{y}_{22} & \\ & & & & & \underline{y}_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{v}_1 \\ \underline{v}_2 \\ \underline{v}_3 \\ \underline{v}_4 \\ \underline{v}_5 \\ \underline{v}_6 \end{bmatrix} \quad (1.106)$$

iar matricea  $[\underline{Y}_{nod}]$  se obține în forma:

$$[\underline{Y}_{nod}] = \begin{bmatrix} \underline{y}_{11} + \underline{y}_{12} + \underline{y}_{13} & -\underline{y}_{12} & -\underline{y}_{13} \\ -\underline{y}_{12} & \underline{y}_{22} + \underline{y}_{12} + \underline{y}_{23} & -\underline{y}_{23} \\ -\underline{y}_{13} & -\underline{y}_{23} & \underline{y}_{33} + \underline{y}_{13} + \underline{y}_{23} \end{bmatrix} \quad (1.107)$$

### Eliminarea nodurilor în matricea admitanțelor nodale

În anumite situații (exemplu: echivalenți de sistem), este utilă reducerea dimensiunii ecuației matriceale (1.91). Pentru a analiza modul în care se poate face acest lucru, să presupunem că vectorii mărimilor nodale de stare sunt ordonați așa încât primele lor  $m$  componente să corespundă nodurilor ce se dorește a fi reținute, adică:

$$[\underline{U}_{nod}] = \begin{bmatrix} [\underline{U}_{nod(m)}] \\ [\underline{U}_{nod(p)}] \end{bmatrix} \quad (1.108)$$

$$\text{și } [\underline{U}_{nod}] = \begin{bmatrix} [\underline{U}_{nod(m)}] \\ [\underline{U}_{nod(p)}] \end{bmatrix} \quad (1.109)$$

Ecuația  $[\underline{I}_{nod}] = [\underline{Y}_{nod}] \cdot [\underline{U}_{nod}]$  se poate dezvolta în două blocuri sub forma:

$$[\underline{I}_{nod(m)}] = [\underline{Y}_A] \cdot [\underline{U}_{nod(m)}] + [\underline{Y}_B] \cdot [\underline{U}_{nod(p)}] \quad (1.110)$$

$$[\underline{I}_{nod(p)}] = [\underline{Y}_C] \cdot [\underline{U}_{nod(m)}] + [\underline{Y}_D] \cdot [\underline{U}_{nod(p)}] \quad (1.111)$$

Să presupunem că nu se dorește eliminarea de noduri în care sunt conectate surse. În acest caz pentru nodurile eliminate  $[L_{nod(p)}] = [0]$ . Prin înlocuirea în (1.110) a expresiei lui  $[U_{nod(p)}]$ , obținută din (1.111), se obține:

$$[L_{nod(m)}] = ([Y_A] - [Y_B] \cdot [Y_D]^{-1} \cdot [Y_C]) [U_{nod(m)}] \quad (1.112)$$

Eliminarea nodurilor se poate face însă și succesiv (nod cu nod). Pentru exemplificare, se scrie desfășurat matricea admitanțelor nodale și se indiciază după cum urmează:

$$[Y_{nod}] = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & \dots & m & \dots & k & \dots & n \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ m \\ \vdots \\ k \\ \vdots \\ n \end{matrix} & \begin{bmatrix} Y_{11} & \dots & Y_{1m} & \dots & Y_{1k} & \dots & Y_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_{m1} & \dots & Y_{mm} & \dots & Y_{mk} & \dots & Y_{mn} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_{k1} & \dots & Y_{kk} & \dots & Y_{kn} & \dots & Y_{kn} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_{n1} & \dots & Y_{nm} & \dots & Y_{nk} & \dots & Y_{nn} \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (1.113)$$

Nodul a cărui eliminare se dorește trebuie dispus pe ultima poziție în  $[L_{nod}]$ . În (1.113) acesta are indicele  $n$ . Prin eliminarea ultimei linii și coloane, elementele matricei rămase se calculează cu:

$$Y_{ij,nou} = Y_{ij,vechi} - \frac{Y_{in,vechi} \cdot Y_{kn,vechi}}{Y_{nn}} \quad (1.114)$$

Această operațiune se reia până la eliminarea tuturor nodurilor nedorite.

#### 1.4.5 CONSTRUCȚIA DIRECTĂ A MATRICEI $[Z_{nod}]$

$[Z_{nod}]$  se poate dezvolta prin tehnici matriceale bazate pe teoria grafurilor [9], se poate obține prin inversarea lui  $[Y_{nod}]$  sau se poate construi direct. Construcția directă recurge la principii diakoptice, folosind un algoritm conceput inițial pentru modificarea  $[Z_{nod}]$  prin adăugarea de laturi. [10].

Se pot diferenția patru cazuri tip de adăugare a unei laturi de impedanță  $Z_l$  la o rețea pentru care matricea admitanțelor nodale, înainte de adăugarea laturii, va fi desemnată ca  $[Z_{nod,orig}]$  (originară). Această din urmă matrice este de dimensiuni  $n \times n$

În calculele ce urmează, noduri deja existente se identifică prin indici din mulțimea  $\{h, i, j, k\}$ . Laturii care trebuie adăugată i se asociază indicele  $p$ . Aceasta mărește dimensiunile matricei admitanțelor nodale la  $(n+1) \times (n+1)$ . Cele patru cazuri sunt:

##### **Cazul 1 Adăugarea unei laturi de impedanță $Z_p$ între un nod nou ( $p$ ) și cel de referință**

Presupune adăugarea unui nou nod,  $p$ , la rețeaua existentă (și la matricea corespunzătoare). Cel puțin în această fază, nodul suplimentar va fi legat doar de nodul de referință, prin latura de impedanță  $Z_p$ . Ulterior se pot adăuga și alte laturi între nodul  $p$  și nodul de referință (cazul 3), sau între nodul  $p$  și un alt nod deja existent (cazul 2).

Injectarea unui curent  $\underline{I}_p$  în noul nod  $p$ , prin singura latură (de impedanță  $\underline{Z}_p$ ) incidentă în acesta, conservă componentele originare ale vectorului tensiunilor nodale,  $[\underline{U}_{nod,orig}] = [\underline{U}_1 \ \underline{U}_2 \ \dots \ \underline{U}_n]^T$ , după cum se observă în Figura 1.23.

Vectorul tensiunilor nodale pentru rețeaua modificată va include o componentă suplimentară,  $\underline{U}_p$ , atașată nodului  $p$ . Ca urmare, matricea admitanțelor nodale pentru rețeaua modificată,  $[\underline{Z}_{nod,modif}]$ , devine

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \\ \vdots \\ \underline{U}_n \\ \underline{U}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & & 0 \\ & & & 0 \\ & & & \vdots \\ & & & 0 \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 \\ & & & \underline{Z}_p \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \\ \vdots \\ \underline{I}_n \\ \underline{I}_p \end{bmatrix} = [\underline{Z}_{nod,modif}] \cdot \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \\ \vdots \\ \underline{I}_n \\ \underline{I}_p \end{bmatrix} \quad (1.115)$$

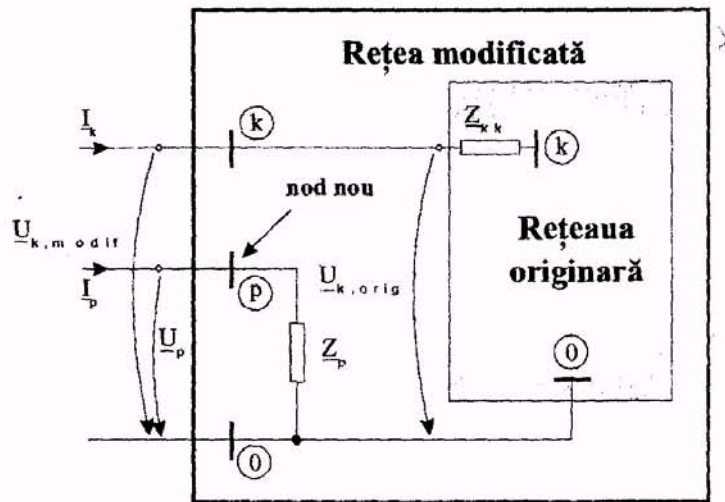


Figura 1.23: Adăugarea unei laturi de impedanță  $\underline{Z}_p$  între un nod nou,  $p$ , și nodul de referință

### Cazul 2 Adăugarea unei laturi de impedanță $\underline{Z}_p$ între un nod nou ( $p$ ) și un nod existent ( $k$ )

Se notează cu  $\underline{I}_k$  curentul în nodul  $k$  înainte de adăugarea laturii. Dacă în noul nod,  $p$ , se injectează un curent  $\underline{I}_p$ , acesta va străbate noua latură, de impedanță  $\underline{Z}_p$  va ajunge în nodul  $k$  și se va adăuga la curentul deja existent  $\underline{I}_k$  (Figura 1.24).

Suplimentarea cu  $\underline{I}_p$  a curentului din nodul  $k$ , determină creșterea tensiunii originare a acestuia,  $\underline{U}_{k,orig}$ , cu  $\underline{Z}_{kk} \cdot \underline{I}_p$ :

$$\underline{U}_{k,modif} = \underline{U}_{k,orig} + \underline{Z}_{kk} \cdot \underline{I}_p \quad (1.116)$$

unde  $\underline{Z}_{kk}$  este elementul diagonal  $k$  al matricei  $[\underline{Z}_{nod,modif}]$ .

Tensiunea nodului  $p$ ,  $\underline{U}_p = \underline{U}_{p,modif}$ , se obține din cea a nodului  $k$ ,  $\underline{U}_{k,modif}$ , prin adăugarea cantității  $\underline{Z}_p \cdot \underline{I}_p$ :

$$\underline{U}_{p,modif} = \underline{U}_{k,orig} + \underline{Z}_{kk} \cdot \underline{I}_p + \underline{Z}_p \cdot \underline{I}_p \quad (1.117)$$

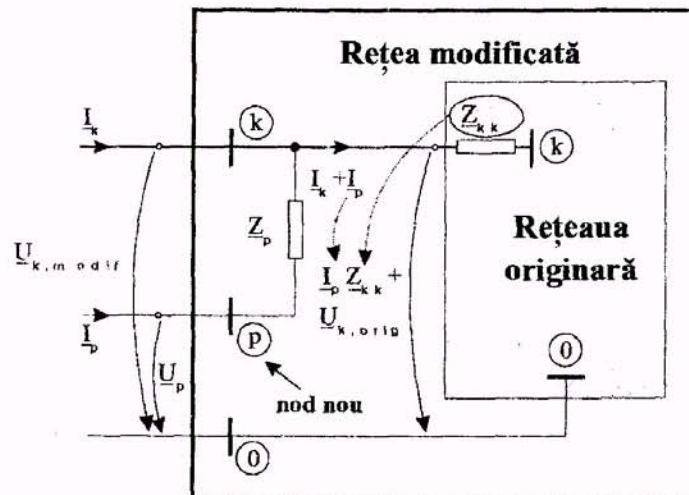
$$\text{adică } \underline{U}_{p,modif} = \underbrace{\underline{Z}_{k1} \cdot \underline{I}_1 + \underline{Z}_{k2} \cdot \underline{I}_2 + \dots + \underline{Z}_{kn} \cdot \underline{I}_n}_{\underline{U}_{k,orig}} + (\underline{Z}_{kk} + \underline{Z}_p) \cdot \underline{I}_p \quad (1.118)$$

Se poate constata că, pentru a obține  $[\underline{Z}_{nod,modif}]$ , trebuie adăugată la  $[\underline{Z}_{nod,orig}]$  o linie suplimentară  $p$  cu componența:

$$\underline{Z}_{k1} \quad \underline{Z}_{k2} \quad \dots \quad \underline{Z}_{kn} \quad (\underline{Z}_{kk} + \underline{Z}_p)$$

Pentru ca  $[\underline{Z}_{nod,modif}]$  să fie pătrată, mai trebuie adăugată la  $[\underline{Z}_{nod,orig}]$  și o coloană. Dacă  $[\underline{Z}_{nod,orig}]$  era simetrică, această nouă coloană se obține prin transpunerea vectorului linie adăugat pentru a constitui linia  $p$ . Noua coloană dă contribuțiile curentului nodal  $\underline{I}_p$  la tensiunile nodale:

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \\ \vdots \\ \underline{U}_n \\ \underline{U}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & & \underline{Z}_{k1} \\ & & & \underline{Z}_{k2} \\ & & & \vdots \\ & & & \underline{Z}_{kn} \\ \underline{Z}_{k1} & \underline{Z}_{k2} & \dots & \underline{Z}_{kn} & \underline{Z}_p + \underline{Z}_{kk} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \\ \vdots \\ \underline{I}_n \\ \underline{I}_p \end{bmatrix} = [\underline{Z}_{nod,modif}] \cdot \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \\ \vdots \\ \underline{I}_n \\ \underline{I}_p \end{bmatrix} \quad (1.119)$$



**Figura 1.24:** Adăugarea unei laturi de impedanță  $\underline{Z}_p$  între un nod nou,  $p$  și unul deja existent  $k$

În cazul general, introducerea liniei între un nod nou,  $p$ , și unul deja existent,  $k$ , presupune completarea matricei  $[\underline{Z}_{nod,orig}]$  cu:

- linia  $p$ , ale cărei prime  $n$  elemente sunt identice cu cele ale liniei  $k$  din  $[\underline{Z}_{nod,orig}]$ , iar la intersecția cu coloana  $n+1$  se plasează elementul  $\underline{Z}_p + \underline{Z}_{kk}$ ;
- coloana  $p$ , ale cărei prime  $n$  elemente sunt identice cu cele ale coloanei  $k$  din  $[\underline{Z}_{nod,orig}]$ , iar la intersecția cu linia  $n+1$  se plasează elementul  $\underline{Z}_p + \underline{Z}_{kk}$ .



### Cazul 3 Adăugarea unei laturi de impedanță $\underline{Z}_p$ între un nod existent ( $k$ ) și cel de referință

Deși poate părea paradoxal, cel mai simplu mod de a identifica modificările determinate în  $[\underline{Z}_{nod,orig}]$  prin adăugarea unei noi laturi între un nod deja existent  $k$  și nodul de referință este unul indirect, care folosește cazul 2 și constă din adăugarea a două laturi, în următoarea succesiune:

- se adaugă o latură de impedanță  $\underline{Z}_p$  între un nod nou  $p$  și nodul de referință;
- se adaugă o latură de impedanță nulă între nodul nou introdus,  $p$ , și pământ, ceea ce face ca  $\underline{U}_p = 0$ .

Circuitul serie format de cele două laturi constituie o cale de impedanță  $\underline{Z}_p$  între nodul  $k$  și pământ. Acest circuit serie este echivalent cu latura care se dorea introdusă deoarece asigură aceeași corespondență între tensiunile și curenții nodali.

Dezavantajul aparent al acestei tehnici indirecte este legat de introducerea unui nod suplimentar,  $p$ , ceea ce duce la creșterea dimensiunii matricei nodale (de la  $n \times n$  cât erau dimensiunile lui  $[\underline{Z}_{nod,orig}]$ , la  $(n+1) \times (n+1)$ ). Dezavantajul este doar aparent întrucât elementele corespunzătoare nodului fictiv pot fi eliminate

- atât din vectorii tensiunilor și curenților nodali (componentele  $\underline{U}_p$  și  $\underline{I}_p$ ), căci  $\underline{U}_p$  se cunoaște deja ( $\underline{U}_p = 0$ ) iar  $\underline{I}_p$  nu interesează, deoarece efectul său se face simțit în nodul  $k$  (unde se adună la curentul nodal);
- cât și din noua matrice a admitanțelor nodale  $[\underline{Z}_{nod,modif}]$  (pentru care nu se mai determină elementele:  $\{\underline{Z}_{p,i}, i = 1, 2, \dots, n\}$ ,  $\{\underline{Z}_{j,p}, j = 1, 2, \dots, n\}$  și  $\underline{Z}_{pp}$ ).

Se evită astfel creșterea dimensiunilor matricei, tratarea unui nod fictiv și un ansamblu de calcule inutile.

Dacă se notează:

- $\underline{Z}_{hi,orig}$ , elementul aflat la intersecția liniei  $h$  cu coloana  $i$  în matricea  $[\underline{Z}_{nod,orig}]$  și
- $\underline{Z}_{hi,int}$  elementul similar din matricea intermediară,  $[\underline{Z}_{nod,int}]$ , obținută prin adăugarea unei laturi de impedanță  $\underline{Z}_p$ , între nodul  $p$  și nodul  $k$

Prin aplicarea procedurii evocate:

1. la adăugarea laturii între nodurile  $p$  și  $k$ , se obține o relație similară cu (1.119):

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \\ \vdots \\ \underline{U}_n \\ \underline{U}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & & & \underline{Z}_{k1} \\ & & & & \underline{Z}_{k2} \\ & & & & \vdots \\ & & & & \underline{Z}_{kn} \\ \underline{Z}_{k1} & \underline{Z}_{k2} & \dots & \underline{Z}_{kn} & \underline{Z}_p + \underline{Z}_{kk} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \\ \vdots \\ \underline{I}_n \\ \underline{I}_p \end{bmatrix} = [\underline{Z}_{nod,int}] \cdot \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \\ \vdots \\ \underline{I}_n \\ \underline{I}_p \end{bmatrix} \quad (1.120)$$

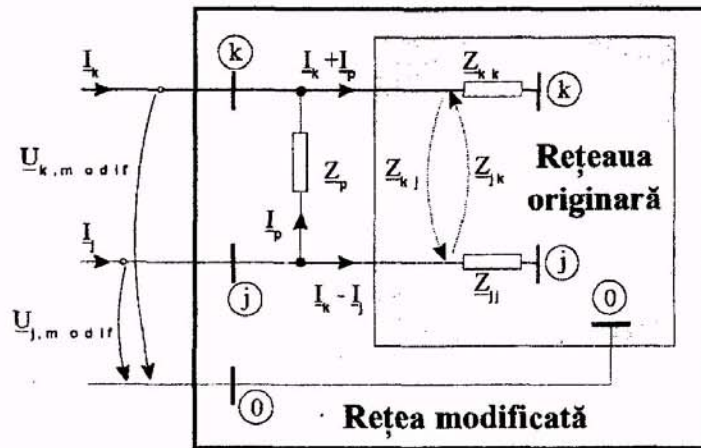
2. la scurtcircuitarea nodului  $p$ , în ecuația (1.120), se introduce  $\underline{U}_p = 0$ :

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \\ \vdots \\ \underline{U}_n \\ \underline{U}_p = 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ \hline & & & & \\ \underline{Z}_{k1} & \underline{Z}_{k2} & \dots & \underline{Z}_{kn} & \underline{Z}_p + \underline{Z}_{kk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \\ \vdots \\ \underline{I}_n \\ \underline{I}_p \end{bmatrix} \quad (1.121)$$

3. la eliminarea nodului  $p$  din (1.121), se obține o relație similară cu (1.111) din § 1.4.4. Se obține o matrice redusă, de dimensiuni  $n \times n$ , ale cărei elemente se calculează cu:

$$\underline{Z}_{hi,redus} = \underline{Z}_{hi,orig} - \frac{\underline{Z}_{hp} \cdot \underline{Z}_{pi}}{\underline{Z}_{kk} + \underline{Z}_p} = \underline{Z}_{hi,orig} - \frac{\underline{Z}_{hk} \cdot \underline{Z}_{ki}}{\underline{Z}_{kk} + \underline{Z}_p} \quad (1.122)$$

**Cazul 4 Adăugarea unei laturi de impedanță  $\underline{Z}_p$  între două noduri existente ( $j$  și  $k$ )**



**Figura 1.25:** Adăugarea laturii de impedanță  $\underline{Z}_p$  între două noduri existente,  $k$  și  $j$

Curentului care străbate latura nou introdusă, de impedanță  $\underline{Z}_p$ , i se poate asocia un sens arbitrar. Ecuațiile care descriu rețeaua modificată se obțin din cele corespunzătoare rețelei originare, în care se operează modificările constatate în Figura 4.18:

- curenții nodali ai nodurilor  $k$  și  $j$  devin:

$$\begin{aligned} \underline{I}_{k,modif} &= \underline{I}_{k,orig} + \underline{I}_p \\ \underline{I}_{j,modif} &= \underline{I}_{j,orig} - \underline{I}_p \end{aligned} \quad (1.123)$$

- noua diferență de potențial între nodurile  $k$  și  $j$  este egală cu tensiunea la bornele noii laturi:

$$\underline{U}_{k,modif} - \underline{U}_{j,modif} = \underline{Z}_p \cdot \underline{I}_p \quad (1.124)$$

Ecuația matriceală  $[\underline{U}_{nod,modif}] = [\underline{Z}_{nod,modif}] \cdot [\underline{I}_{nod,modif}]$  se scrie în formă desfășurată:

$$\underline{U}_{m,modif} = \sum_{r=1}^n \underline{Z}_{mr} \cdot \underline{I}_{r,modif}, \quad \forall m \in \{1, 2, \dots, n\} \quad (1.125)$$

Operând în (1.125) înlocuirile presupuse de (1.123) se obține:

$$\underline{U}_{m,modif} = \sum_{m=1}^n \underline{Z}_{mr} \cdot \underline{I}_{r,orig} + \underline{Z}_{mk} \cdot (\underline{I}_{k,orig} + \underline{I}_p) + \underline{Z}_{mj} \cdot (\underline{I}_{j,orig} - \underline{I}_p), \forall m \in \{1, 2, \dots, n\} \quad (1.126)$$

Echivalența între rețeaua originală și cea modificată presupune răspunsuri identice  $\underline{U}_{m,modif} = \underline{U}_{m,orig}, \forall m \in \{1, 2, \dots, n\}$  pentru excitații identice  $\underline{I}_{m,modif} = \underline{I}_{m,orig}, \forall m \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Din acest motiv se va renunța la indicii *modif* și *orig*. În aceste condiții ecuația (1.124) se poate rescrie sub forma:

$$0 = \underline{Z}_p \cdot \underline{I}_p - \underline{U}_j + \underline{U}_k \quad (1.127)$$

Înlocuind în (1.127) tensiunile  $\underline{U}_j$  și  $\underline{U}_k$  prin expresiile lor din (1.126) se obține:

$$0 = \underline{Z}_p \cdot \underline{I}_p + \sum_{m=1}^n (\underline{Z}_{jm} - \underline{Z}_{km}) \cdot \underline{I}_m + (\underline{Z}_{jj} + \underline{Z}_{kk} - 2\underline{Z}_{jk}) \cdot \underline{I}_p \quad (1.128)$$

$$\text{sau} \quad 0 = \sum_{m=1}^n (\underline{Z}_{jm} - \underline{Z}_{km}) \cdot \underline{I}_m + \underline{Z}_{pp} \cdot \underline{I}_p \quad (1.129)$$

$$\text{unde} \quad \underline{Z}_{pp} = \underline{Z}_p + \underline{Z}_{jj} + \underline{Z}_{kk} - 2\underline{Z}_{jk} \quad (1.130)$$

Ecuațiile (1.126) și (1.129) se pot reuni într-o formulare matriceală:

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \\ \vdots \\ \underline{U}_j \\ \vdots \\ \underline{U}_k \\ \vdots \\ \underline{U}_n \\ \underline{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & & & & & & & \\ & & & & & & & & \\ & & & & & & & & \\ & & & & & & & & \\ & & & & & & & & \\ & & & & & & & & \\ & & & & & & & & \\ & & & & & & & & \\ \underline{Z}_{j1} - \underline{Z}_{k1} & \dots & \underline{Z}_{jm} - \underline{Z}_{km} & \dots & \underline{Z}_{jn} - \underline{Z}_{kn} & & & & \\ & & & & & & & & \underline{Z}_{pp} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \\ \vdots \\ \underline{I}_j \\ \vdots \\ \underline{I}_k \\ \vdots \\ \underline{I}_n \\ \underline{I}_p \end{bmatrix} \quad (1.131)$$

Comparând (1.131) cu  $[\underline{U}_{nod}] = [\underline{Z}_{nod,modif}] \cdot [\underline{I}_{nod}]$ , se constată că matricea impedanțelor nodale a rețelei modificate,  $[\underline{Z}_{nod,modif}]$  se obține din cea originală,  $[\underline{Z}_{nod,orig}]$  prin adăugarea:

- unei coloane ale cărui prime  $n$  elemente formează un vector care reprezintă diferența între coloanele  $j$  și  $k$  din  $[\underline{Z}_{nod,orig}]$ , iar ultimul element se calculează cu (1.130);
- unei linii ale cărei prime  $n$  elemente formează un vector care reprezintă diferența între liniile  $j$  și  $k$  din  $[\underline{Z}_{nod,orig}]$ , iar ultimul element se calculează cu (1.130).

Dintr-o perspectivă nodală, curentul  $\underline{I}_p$  nu are nici o relevanță. Pentru readucerea matricei impedanțelor nodale la dimensiunile  $n \times n$ , trebuie eliminate ultima linie și ultima coloană din (1.131), după procedura din § 1.4.4. Elementele acestei matrice reduse se determină cu o relație similară cu (1.122):

$$\underline{Z}_{hi,redus} = \underline{Z}_{hi,orig} - \frac{\underline{Z}_{hp} \cdot \underline{Z}_{pi}}{\underline{Z}_{kk} + \underline{Z}_p} = \underline{Z}_{hi,orig} - \frac{\underline{Z}_{hk} \cdot \underline{Z}_{ki}}{\underline{Z}_p + \underline{Z}_{jj} + \underline{Z}_{kk} - 2\underline{Z}_{jk}} \quad (1.132)$$

**OBSERVAȚIE:** Un ultim caz posibil, este cel al adăugării unei laturi care să lege două noduri noi,  $p$  și  $q$ . Cele două noduri noi nu pot fi introduse izolat față de toate celelalte noduri, căci nu ar fi de nici o utilitate. Așadar cel puțin unul dintre ele (dacă nu ambele), trebuie ulterior conectate cu alte noduri. Este mai firesc să se adauge întâi latura (sau laturile) de legătură cu restul rețelei ale unuia (sau singurului) dintre noduri. Nodul astfel legat nu mai constituie un nod nou și problema se reduce la unul dintre cazurile 2 sau 4.

#### UTILIZAREA TEHNICII LA CONSTRUIREA LUI $[Z_{nod}]$

Plecând de la nodul de referință, se adaugă succesiv laturi, respectând regulile de modificare a lui  $[Z_{nod}]$  prezentate în analiza anterioară asupra cazurilor posibile.

Astfel, procedura demarează cu scrierea ecuației pentru unul dintre nodurile legat de nodul de referință. Atașând indicele 1 acestui prim nod și considerând că impedanța laturii care îl leagă de cel de referință este  $Z_a$ , prima ecuație se prezintă sub forma:

$$\underline{U}_1 = \underline{Z}_a \cdot \underline{I}_1 \quad (1.133)$$

Această ecuație poate fi considerată ca o ecuație matriceală în care:

$$\begin{aligned} [\underline{U}_{nod}] &= [\underline{U}_1] \\ [\underline{I}_{nod}] &= [\underline{I}_1] \\ [\underline{Z}_{nod}] &= [\underline{Z}_a] \end{aligned} \quad (1.134)$$

A doua etapă constă din adăugarea unei noi laturi, fie între un nod nou și cel de referință, fie între un nou nod și nodul 1. Spre exemplu, dacă și al doilea nod trebuie legat, printr-o latură de impedanță  $Z_p$ , tot de nodul de referință, ecuația matriceală a rețelei modificate capătă forma:

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Z}_a & 0 \\ 0 & \underline{Z}_p \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix} \quad (1.135)$$

Procedeul se continuă până la reproducerea completă a topologiei rețelei. În acest mod matricea  $[Z_{nod}]$  se construiește progresiv elementele sale determinându-se pe măsura adăugării laturilor. Dacă indicieria nodurilor practică pe măsura introducerii acestora nu corespunde cu cea din rețeaua reală, în final trebuie procedat la reindicieria acestora (operație ce constă din permutări între linii și respectiv între coloanelor).

Această tehnică nu este rezervată exclusiv calculului matricei impedanțelor nodale pentru rețele extinse. Ea se dovedește mai eficientă decât cele matriceale chiar pentru rețele cu cinci sau șase noduri. Pentru calcule analitice, supremația ei este încă și mai evidentă.

## 1.5 MATRICE PARȚIALE DE REȚEA

Pot exista situații în care nu se dorește rezolvarea completă a rețelei. Reducerea modelului la o scară convenabilă trebuie bazată pe un model nodal, obținut prin eliminarea unei părți a rețelei, fără neglijarea impactului părții suprimate. În acest mod, analiza subrețelelor devin focalizate și nu trunchiate.

Realizarea acestui deziderat se poate obține prin eliminarea succesivă a nodurilor, prezentată în § 1.4.4 și aplicată în § 1.4.5. Dacă numărul de noduri ce trebuie eliminate este mare, procedura este greoaie și risipa de timp de calcul este prea mare. Se simte așadar nevoia unei abordări sistematice care, folosind tehnici avansate de calcul matriceal, să permită optimizarea rezolvării.

În cele ce urmează se va analiza modul în care se pot manipula, într-o primă fază matricele în general și ulterior matricele nodale, pentru a putea calcula doar anumite mărimi.

### 1.5.1 PARTIȚIONAREA MATRICELOR

După cum s-a observat, modelele nodale ale rețelei, atât cel în impedanțe,  $[U_{nod}] = [Z_{nod}] \cdot [I_{nod}]$ , cât și cel în admitanțe,  $[I_{nod}] = [Y_{nod}] \cdot [U_{nod}]$ , sunt în fapt sisteme liniare.

Rezolvarea parțială a rețelei, evocată anterior ca obiectiv, revine la rezolvarea parțială a sistemului de ecuații aferent. Tehnica folosită pentru atingerea acestui obiectiv este cunoscută sub numele de partiționarea matricelor și va fi exemplificată pe baza unui sistem de trei ecuații.

Se consideră sistemul liniar descris de produsul matriceal:

$$[x] = [A] \cdot [B], \quad (1.136)$$

care, dacă este de ordinul trei, este descris de matricele:

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [D] & [E] \\ [F] & [G] \end{bmatrix} \quad (1.137)$$

$$[D] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

unde  $[E] = \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{bmatrix}$  (1.138)

$$[F] = [a_{31} \quad a_{32}]$$

$$[G] = [a_{33}]$$

$$[B] = [b_{11} \quad b_{21} \quad b_{31}]^T = [[H] \quad [J]]^T \quad (1.139)$$

$$[H] = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{bmatrix} \text{ și } [J] = [b_{31}] \quad (1.140)$$

$$[x] = [x_1 \quad x_2 \quad x_3]^T = [[M] \quad [N]]^T \quad (1.141)$$

cu  $[M] = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$  și  $[N] = [x_3]$  (1.142)

Să presupunem că interesează exclusiv determinarea lui  $x_1$  și  $x_2$ . Este evident că vectorul corespunzător nu se poate calcula eliminând cea de-a treia ecuație, adică efectuând produsul  $[D] \cdot [H]$ . Deoarece  $[x]$ :

$$[x] = [A] \cdot [B] = \begin{bmatrix} [D] \cdot [H] + [E] \cdot [J] \\ [F] \cdot [H] + [G] \cdot [J] \end{bmatrix} \quad (1.143)$$

conform partiționării (1.141), prin identificare se obține

$$[M] = [D] \cdot [H] + [E] \cdot [J] \quad (1.144)$$

$$[N] = [F] \cdot [H] + [G] \cdot [J] \quad (1.145)$$

Relația (1.144) permite calculul exclusiv pentru mărimile căutate (aici  $x_1$  și  $x_2$ ) grupate în  $[M]$ . Această tehnică se aplică în secțiunea următoare pentru modelul în admitanțe.

## 1.5.2 MATRICE PARȚIALE DE REȚEA

Eliminarea simultană din modelul nodal a unui ansamblu de noduri trebuie să respecte condiția de a nu elimina noduri sursă. Aplicarea tehnicii din secțiunea precedentă pentru modelul nodal în formulare cu admitanțe (cu matrice simetrică), presupune partiționarea acestuia:

$$\begin{bmatrix} [I_A] \\ [I_x] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [K] & [L] \\ [L]^T & [M] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [U_A] \\ [U_x] \end{bmatrix} \quad (1.146)$$

unde  $[I_x]$  reprezintă submatricea curenților nodurilor care trebuie eliminate și  $[U_x]$  tensiunile nodale aferente. Pentru a respecta cerința de a nu elimina noduri sursă, trebuie ca toate componentele lui  $[I_x]$  să fie nule:

$$[I_x] = [0] \quad (1.147)$$

Matricea pătrată  $[K]$  conține admitanțele proprii și mutuale pentru nodurile reținute iar  $[M]$  pe cele ale nodurilor ce trebuie eliminate. Matricea  $[L]$  și transpusa acesteia,  $[L]^T$ , includ admitanțele de cuplaj între nodurile reținute și cele eliminate.

Corespunzător relațiilor (1.144) și (1.145) se scrie în acest caz:

$$[I_A] = [K] \cdot [U_A] + [L] \cdot [U_x] \quad (1.148)$$

$$[I_x] = [L]^T \cdot [U_A] + [M] \cdot [U_x] \quad (1.149)$$

Introducând (1.147) în (1.149) se obține expresia vectorului tensiunilor nodurilor care trebuie eliminate:

$$[U_x] = -[M]^{-1} \cdot [L]^T \cdot [U_A], \quad (1.150)$$

care înlocuit în (1.148) permite scrierea unei relații exclusiv între vectorii tensiunilor reținute și admitanțele rețelei:

$$[I_A] = ([K] - [L] \cdot [M]^{-1} \cdot [L]^T) \cdot [U_A] \quad (1.151)$$

Prin identificare se obține matricea admitanțelor nodale a rețelei reduse:

$$[Y_{nod\ redus}] = [K] - [L] \cdot [M]^{-1} \cdot [L]^T \quad (1.152)$$

Aplicarea acestei tehnici pentru un singur nod (când  $[I_x]$  și  $[U_x]$  devin scalari), conduce la o matrice ale cărei elemente se calculează cu relația (1.114).

## 1.6 ELEMENTE DE CONTROL FACTS

Acronimul FACTS desemnează sistemele de transport al energiei electrice funcționând în curent alternativ care încorporează sisteme de control bazate pe electronica de putere sau alte tipuri de control static, cu scopul de a îmbunătăți flexibilitatea sistemului și a crește capacitatea de transport a acestuia [11]. Conceptul este explicat în Figura 1.26 pentru o interconexiune între două sisteme electroenergetice.

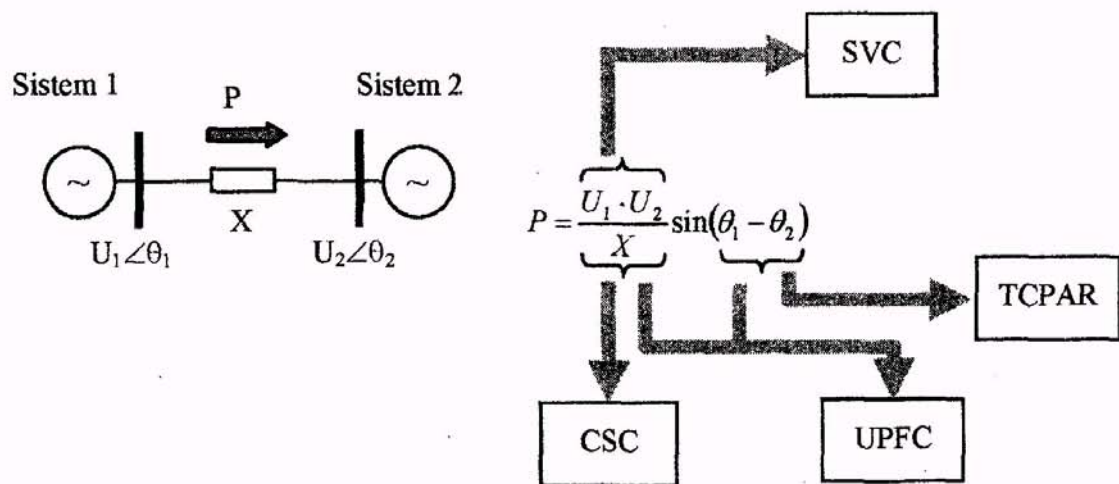


Figura 1.26: Principiul controlului cu dispozitive FACTS

## 1.7 BIBLIOGRAFIE

- [1] B.M. Weedy, B.J. Cory: "Electric Power Systems, John Wiley & Sons, 1998.
- [2] J.J. Grainger, W.D. Stevenson: "Power System Analysis", Mc. Graw-Hill, New York, 1994.
- [3] H. Saadat: "Power System Analysis", McGraw-Hill, 1999.
- [4] P. Kundur: "Power System Stability and Control", McGraw-Hill, 1994.
- [5] [5] R.H. Park: „Two Reaction Theory of Synchronous Machines - Generalized Method of Analysis”, AIEE Trans., Vol. 48, pp. 716-727
- [6] [6] S. Pătrășcoiu: „Stabilitatea sistemelor electroenergetice. Abordări clasice și moderne”, București 2002, ISBN 973-652-208-3
- [7] [7] S.B. Franham, R.W. Swartnout: „Field Excitation in Relation to Machine and System Operation”, AIEE Trans, pp. 1215 - 1223, December 1953
- [8] [8] J.A. Momoh, M.E. El-Hawary: „Electric Systems, Dynamics, and Stability with Artificial Intelligence Applications”, Marcel Dekker, 2000.
- [9] [9] L.G. Mănescu: “Rețele electrice de transport: Regimuri de funcționare”, Editura Universitaria, Craiova, 1999
- [10] H.E. Brown: "Solutions for Large Networks by Matrix Methods", John Wiley & Sons, New York, 1975
- [11] M. Crappe, J. Trecat: "FACTS ou comment contourner les lois de Kirchhoff", Université de Liège - Institut Montefiore, 1996