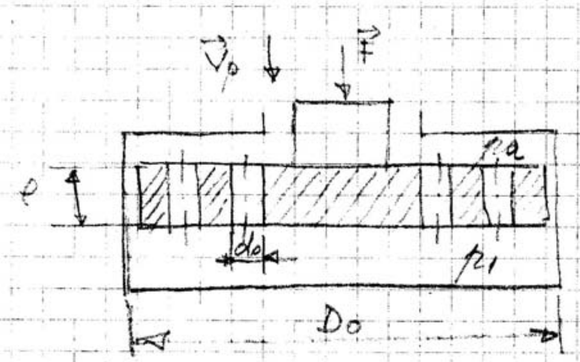
SEMINAR 7+8

APLICAȚII LA DINAMICA FLUIDELOR REALE ÎN MIȘCARE LAMINARĂ

(1) Pentru amortizarea șocului provocat de forța de recul, un tun este prevăzut cu frână cataract, care constă dintr-un cilindru cu ulei și un piston prevăzut cu orificii circulare de diametru d_0. Cunoscând vâscozitatea uleiului și diametrul D_0, forța de recul F și viteza v_p cu care se deplasează pistonul, se cere numărul N al orificiilor circulare din pistonul cataractului, dacă pe fața superioară a pistonului presiunea este cea atmosferică.



Rezolvare:

Forța F creează, pe fața inferioară a pistonului, presiunea:

$$p_1 = \frac{F}{\frac{\pi D_0^2}{4}} + p_a$$

Prin urmare, variația presiunii pe cele două fețe ale pistonului este:

$$\Delta p = p_1 - p_a = \frac{4F}{\pi D_0^2}$$

Această variație de presiune produce o curgere laminară a uleiului, prin orificiile circulare, cu viteza medie obținută din relația (obținută la studiul mișcării laminare a unui fluid real într-o conductă cilindrică circulară):

$$v = \frac{1}{4\eta}\left(\frac{\Delta p}{\ell} - \rho g \sin\alpha\right)(R_0^2 - R^2)$$

unde: $\cdot \alpha = 0$

$$v_{max} = \frac{1}{4\eta}\frac{\Delta p}{\ell}R_0^2, \text{ pentru } R = 0$$

$$v_{min} = 0, \text{ pentru } R = R_0.$$

Viteza medie este deci:

$$V = \frac{1}{8\eta}\cdot\frac{\Delta p}{\ell}R_0^2 = \frac{1}{8\eta}\frac{4F}{\pi D_0^2 \ell}\cdot\frac{d_0^2}{4} = \frac{F d_0^2}{8\pi D_0^2 \eta \ell}$$

Datorită faptului că $p_1 > p_a$, prin orificii se scurge, în sus, o anumită cantitate de ulei, care face ca pistonul să coboare cu viteza v_p, care este legată de v prin ecuația de continuitate:

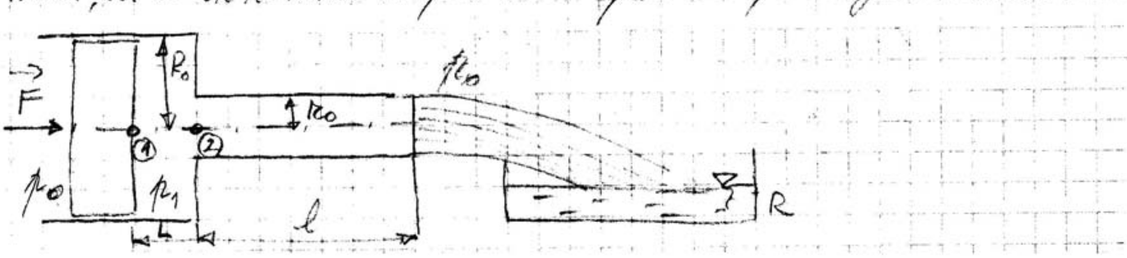
$$Q = v \cdot N \cdot \frac{\pi d_0^2}{4} = v_p \cdot \frac{\pi D^2}{4}$$

Rezultă numărul orificiilor:

$$N = \frac{v_p \cdot \frac{\pi D_0^2}{4}}{v \cdot \frac{\pi d_0^2}{4}} = \frac{v_p}{v}\left(\frac{D_0}{d_0}\right)^2 = v_p\left(\frac{D_0}{d_0}\right)^2 \frac{8\pi D_0^2 \eta \ell}{F d_0^2} =$$

$$= 8\pi\eta\frac{\ell}{F}\left(\frac{D_0}{d_0}\right)^4 \cdot v_p$$

② Pistonul din figură împinge cu o forță utilă constantă $\vec{F}$, uleiul în cilindrul de rază R_0 și, mai departe, printr-o conductă de lungime ℓ și rază r_0, uleiul este golit într-un rezervor. Presupunând că mișcarea în cilindru și în conductă este laminară, să se determine timpul în care pistonul parcurge cursa L.



Rezolvare

Din relația vitezei medii, la mișcarea într-o conductă circulară, determinată la problema precedentă:

$$V = \frac{1}{8\eta}\,\frac{\Delta p}{l}\,R_0^2$$

rezultă debitul:

$$Q = V\cdot\pi R_0^2 = \frac{1}{8\eta}\,\frac{\Delta p}{l}\cdot R_0^2\cdot\pi R_0^2 = \frac{\pi\Delta p}{8\eta l}\,R_0^4$$

De unde:

– pentru cilindru: $\Delta p = p_1 - p_2 = \dfrac{8\eta L}{\pi R_0^4}\,Q$

– pentru conductă: $\Delta p = p_2 - p_0 = \dfrac{8\eta l}{\pi r_0^4}\cdot Q$ (+)

$$p_1 - p_0 = \frac{8\eta Q}{\pi}\left(\frac{L}{R_0^4} + \frac{l}{r_0^4}\right)$$

Această variație de presiune este produsă prin acțiunea forței F, pe suprafața secțiunii cilindrului, adică:

$$\Delta p = p_1 - p_0 = \frac{F}{\pi R_0^2}$$

Egalând cele două relații pentru Δp, se obține debitul:

$$\frac{F}{\pi R_0^2} = \frac{8\eta Q}{\pi}\left(\frac{L}{R_0^4} + \frac{l}{r_0^4}\right)$$

$$\Rightarrow Q = \frac{F}{8\eta R_0^2\left(\frac{L}{R_0^4} + \frac{l}{r_0^4}\right)} = \frac{F}{8\eta\left(\frac{L}{R_0^2} + \frac{R_0^2}{r_0^4}l\right)}$$

Volumul de lichid scurs în timpul dt este:

$$dV = Q\,dt$$

de unde:

$$dt = \frac{dV}{Q} = \frac{\pi R_0^2\,dL}{\dfrac{F}{8\eta\left(\frac{L}{R_0^2} + \frac{R_0^2}{r_0^4}l\right)}} = \frac{8\eta\pi R_0^2\left(\frac{L}{R_0^2} + \frac{R_0^2}{r_0^4}l\right)}{F}\,dL,$$

Timpul în care pistonul parcurge întreaga cursă L, se obține prin integrare:

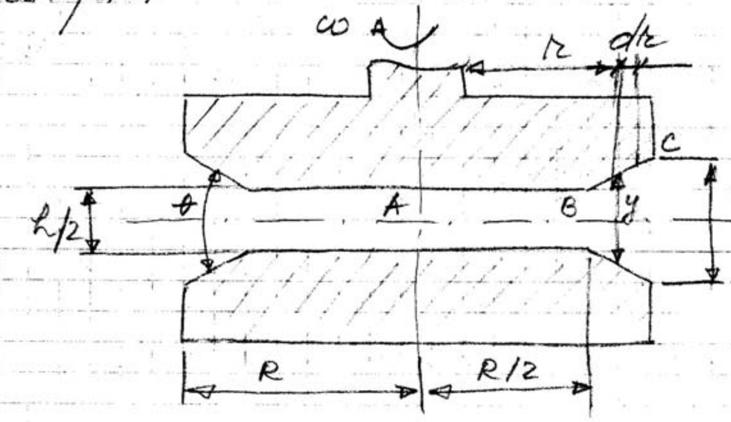
$$T=\int dt=\frac{8\eta\pi R_0^2}{F}\int_0^L\left(\frac{L}{R_0^2}+\frac{R_0^2}{r_0^4}\ell\right)dL=$$

$$=\frac{8\eta\pi R_0^2}{F}\left(\frac{1}{R_0^2}\frac{L^2}{2}\Big|_0^L+\frac{R_0^2\ell}{r_0^4}L\Big|_0^L\right)=$$

$$=\frac{8\eta\pi R_0^2}{F}\left(\frac{L^2}{2R_0^2}+\frac{R_0^2\ell L}{r_0^4}\right)=\frac{8\pi\eta\ell L}{F}\left(\frac{R_0}{r_0}\right)^4\left(\frac{Lr_0^4}{2\ell R_0^4}+1\right)=$$

$$=\frac{8\pi\eta\ell L}{F}\left(\frac{R_0}{r_0}\right)^4\left[1+\frac{L}{2\ell}\left(\frac{r_0}{R_0}\right)^4\right]$$

(3) Care este puterea disipată pentru învingerea forțelor de vâscozitate în filmul de ulei al lagărului din figură? Cu cât crește puterea disipată, în cazul în care deschiderea este uniformă? Se admite un regim laminar de curgere.



Rezolvare

a) Pentru o fâșie elementară circulară, de rază r și lățime dr, variația de viteză între placa inferioară fixă și cea superioară mobilă este:

$$\Delta V=v-V_0=\omega r$$

Conform legii lui Newton, între plăci se dezvoltă tensiunea tangențială de frecare:

$$\tau = \eta \frac{\Delta v}{\frac{h}{2}} = \frac{2\eta\omega r}{h}$$

Rezultă cuplul elementar de frecare:

$$dM = F_{fr} \cdot r = \tau\, dA\, r = \frac{2\eta\omega r}{h} 2\pi r^2 dr =$$

$$= \frac{4\pi\eta\omega}{h} r^3 dr$$

Puterea disipată este:

$$P = M \cdot \omega$$

Prin integrare, rezultă:

$$M_{AB} = \int_0^{\frac{R}{2}} \frac{4\pi\eta\omega}{h} r^3 dr = \frac{4\pi\eta\omega}{h} \cdot \frac{r^4}{4}\Big|_0^{\frac{R}{2}} =$$

$$= \frac{\pi\eta\omega}{h} \frac{R^4}{16}$$

$$P_{AB} = M_{AB} \cdot \omega = \frac{\pi\eta\omega^2}{h} \frac{R^4}{16}$$

b) Pe porțiunea divergentă BC a lagărului, tensiunea de frecare este:

$$\tau = \eta \frac{dv}{y}$$

unde y este de forma:

$$y = \alpha r + \beta$$

Constantele α și β rezultă din condițiile la limită, adică:

$$\begin{aligned} &- \text{pentru } r = \frac{R}{2} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{h}{2} = \alpha \cdot \frac{R}{2} + \beta \\ y = h = \alpha R + \beta \end{cases} \\ &- \text{pentru } r = R \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\beta = \frac{h}{2} - \frac{R}{2}\alpha = \frac{1}{2}(1 - R\alpha)$$

$$h = \alpha R + \frac{1}{2}(1 - R\alpha)$$

$$h = \alpha R + \frac{h}{2} - \frac{R\alpha}{2}$$

$$\frac{h}{2} = \frac{\alpha R}{2} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{h}{R} \\ \beta = \frac{1}{2}\left(h - R\cdot\frac{h}{R}\right) = 0 \end{cases}$$

Deci: $y = \frac{h}{R}\cdot r$

$$\boxed{\tau} = \eta\,\frac{\Delta v}{\frac{h}{R}\cdot r} = \frac{\eta\omega r}{\frac{h}{R}\cdot r} = \boxed{\frac{\eta\omega R}{h}}$$

Rezultă cuplul elementar

$$dM_{BC} = \tau\, dA_r = \frac{\eta\omega R}{h}\cdot 2\pi r^2 dr$$

După integrare:

$$M_{BC} = \int_{\frac{R}{2}}^{R} \frac{\eta\omega R}{h}\, 2\pi r^2 dr = \frac{\eta\omega R}{h}\cdot 2\pi\,\frac{r^3}{3}\Big|_{\frac{R}{2}}^{R} =$$

$$= \frac{\eta\omega R}{h}\cdot 2\pi\left(\frac{R^3}{3} - \frac{R^3}{24}\right) = \frac{\cancelto{7}{14}\pi\eta\omega R^4}{\cancelto{12}{24}h} =$$

$$= \frac{7\pi\eta\omega R^4}{12h}$$

$$P_{BC} = M\omega = \frac{7\pi\eta\omega^2 R^4}{12h}$$

Puterea totală disipată este:

$$P = P_{AB} + P_{BC} = {}^{3)}\frac{\pi\eta\omega^2 R^4}{16h} + {}^{4)}\frac{7\pi\eta\omega^2 R^4}{12h} =$$

$$= \frac{31\pi\eta\omega^2 R^4}{48h}$$

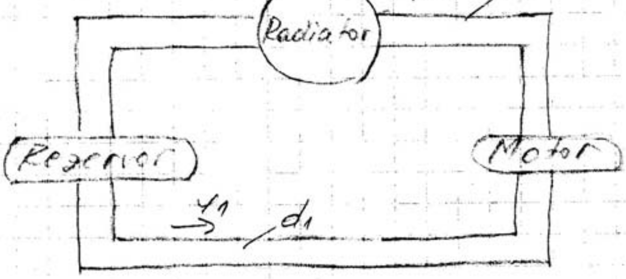
Pentru fanta uniformă se obține puterea disipată:

$$P' = \frac{\pi\eta\omega^2}{h}\, r\Big|_0^R = \frac{\pi\eta\omega^2 R^4}{h}$$

Deci:

$\frac{P'}{P} = \frac{48}{31} = 1{,}55$ ⇒ o sporire cu 55% a puterii disipate, în cazul lagărului uniform, ceea ce justifică geometria inițială a lagărului

④ În circuitul de răcire din figură, se introduce uleiul de lucru în motor la temperatura $t_1 = 55°C$, la care vâscozitatea acestuia este $\nu_1 = 0,9\ cm^2/s$, printr-o conductă cu diametrul $d_1 = 45\ mm$, evacuându-se uleiul acesta către radiator, la temperatura $t_2 = 100°C$, la care vâscozitatea este $\nu_2 = 0,2\ cm^2/s$, printr-o conductă cu diametrul $d_2 = 25\ mm$. Dacă debitul de circulație este $Q = 1,3\ l/s$, să se determine regimul hidraulic de curgere la intrarea și ieșirea din motor.



Rezolvare

Determinarea regimului de curgere se face în urma calculării numărului lui Reynolds:

$$Re = \frac{v \cdot d}{\nu}$$

Pentru determinarea vitezelor v_1 și v_2 se utilizează ecuația de continuitate:

$$Q = v_1 \cdot \frac{\pi d_1^2}{4} = v_2 \cdot \frac{\pi d_2^2}{4}$$

$$v_1 = \frac{4Q}{\pi d_1^2} = \frac{4 \cdot 1,3 \cdot 10^{-3}}{\pi \cdot 0,045^2} = 0,81\ m/s$$

$$v_2 = \frac{4Q}{\pi d_2^2} = \frac{4 \cdot 1,3 \cdot 10^{-3}}{\pi \cdot 0,025^2} = 2,64\ m/s$$

– la intrare în motor

$$Re = \frac{0,81 \cdot 0,045}{0,9 \cdot 10^{-4}} = 405 < 2300 \Rightarrow \text{curgere laminară}$$

– la ieșirea din motor

$$Re = \frac{2{,}64 \cdot 0{,}025}{0{,}2 \cdot 10^{-4}} = 3300 > 2300 \Rightarrow \text{curgere turbulentă}$$