C4_1

PROCESAREA SEMNALELOR ÎN SISTEMELE ELECTROENERGETICE

1. TIPURI DE SEMNALE ÎN SEE

Semnalele = *mărimi sau variabile detectabile prin intermediul cărora se pot trasnmite informații; ele există doar în măsura în care li se asociază un sistem care răspunde la existența (stimulul) lor.*

În urma operațiilor de măsurare şi stocare a informației, semnalele sunt prezentate sub forma unor serii de numere şi apar ca funcții de timp.

Obiectivul procesării semnalelor este de:

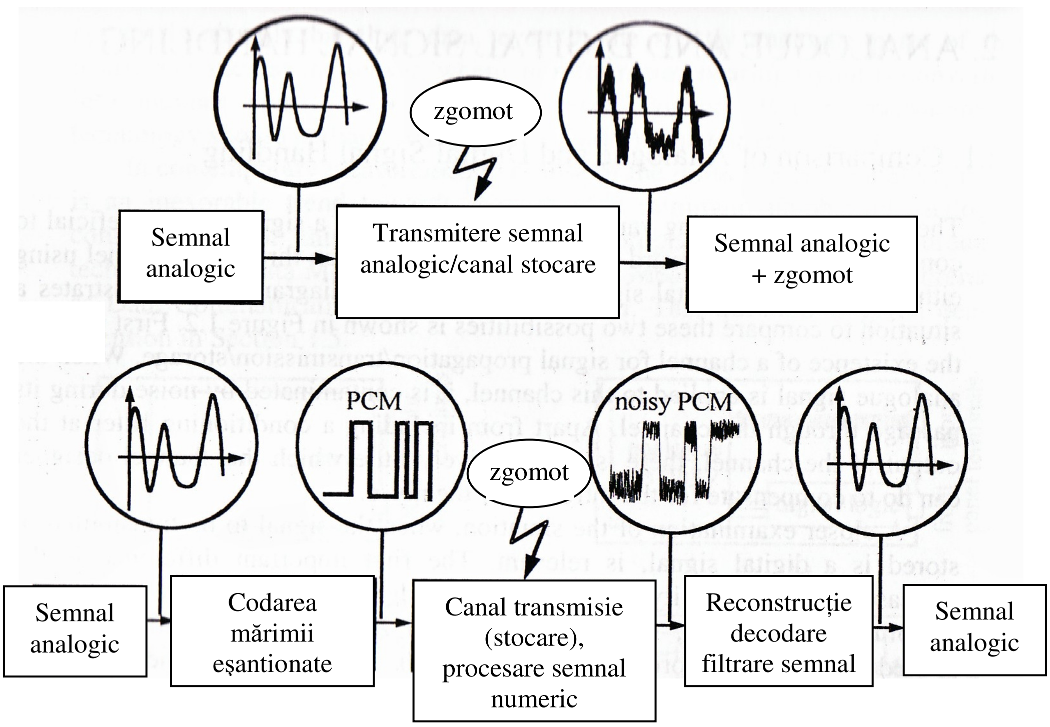
- *a analiza precis*
- *a codifica eficient*
- *a transmite rapid*
- *a reconstitui fidel*

la receptor, oscilațiile sau fluctuațiile semnalelor.

Prelucrarea semnalelor se poate face:

- *analogic;*
- *numeric* (utilizând procesoare).

Principiul care stă la baza fiecărui tip de procesare este dat în Fig.1.



a.

b.

Fig.1. *Transmiterea unui semnal:a) analogic, afectat de zgomot, printr-un canal analogic; b) numeric, afectat de zgomot, printr-un canal numeric*

Notă: PMC - ***P**ulse **C**ode **M**odulation*

Tip prelucrare	**Avantaje**	**Dezavantaje**
Analogică	Simplitate	Instabilă

	Continuitate	Cu fiecare prelucrare suplimentară, efectele de distorsiune se pot amplifica Erori mai mari de citire
Numerică	Sensibilitate redusă la zgomot Procesare rapidă Reproducerea cu mare fidelitate a semnalului de intrare	Complexitate Rezoluție finită

2. ANALIZA DATELOR ANALOGICE

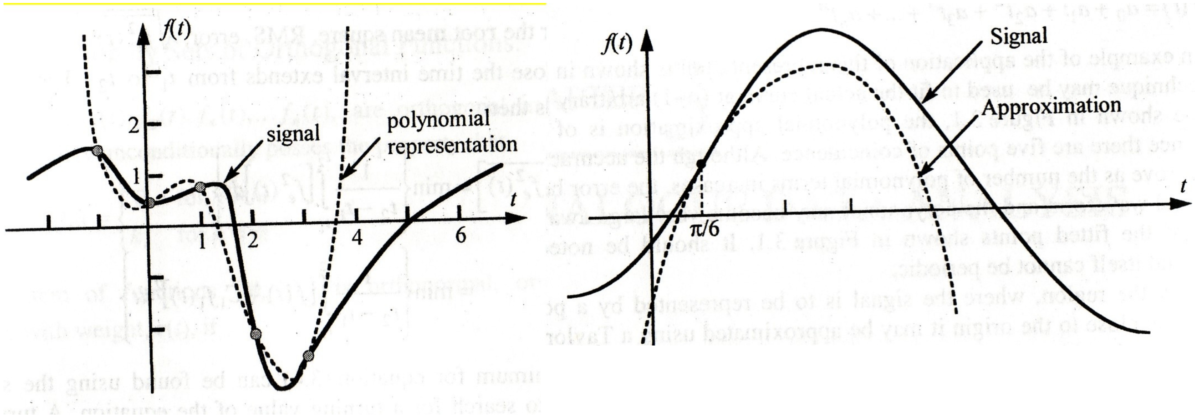
2.1. Reprezentarea semnalelor

Există două variante uzuale de descriere a semnalelor, reprezentate:
- *în domeniul timp*
- *în domeniul frecvență.*

Reprezentarea în domeniul timp a semnalelor poate fi făcută, de exemplu:
- cu ajutorul unor funcții trigonometrice (funcția sinus, caracterizată de valoare maximă, frecvență, pulsație, perioadă, valoare medie, valoare efectivă):

$f(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$

- cu ajutorul descompunerii în serii de puteri: descompuneri în serie MacLaurin (polinoame) (Fig.2.a) sau Taylor (Fig.2.b) (când semnalul aproximat este departe de origine) – aceste aproximări **nu sunt periodice;**



a. *b.*

Fig.2. *Aproximarea unui semnal sinusoidal cu ajutorul: a) unui polinom; b) prin descompunere în serie Taylor*

- cu ajutorul funcțiilor ortogonale.

Aproximarea curbelor cu ajutorul funcțiilor ortogonale

Un semnal *f(t)* poate fi aproximat pe un interval $t_1<t<t_2$ printr-un semnal $f_1(t)$ de maniera :

$f(t) = a_1 f_1(t)$ pe intervalul determinat, cu constanta C_1 adecvat aleasă.

Cea mai apropiată reprezentare poate fi estimată pe baza criteriului erorii, care urmărește:
- minimizarea valorii medii a funcției eroare:

$$f_e(t) = f(t) - a_1 f_1(t) \tag{1}$$

sau
- minimizarea erorii medii pătratice:

$$\sqrt{\overline{f_e^2(t)}} = \sqrt{\frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2}\left[f_e^2(t)\right]dt} \tag{2}$$

Minimul funcției (2) se obține pentru:

$$\frac{d}{da_1}\left(\int_{t_1}^{t_2}\left[f_e^2(t)\right]dt\right) = 0 \tag{3.a}$$

Rezultă:

$$a_1 = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t) f_1(t) dt}{\int_{t_1}^{t_2} f_1^2(t) dt} \tag{3.b}$$

Dacă semnalele f şi f_1 sunt ortogonale pe intervalul definit, $a_1=0$, iar f(t) nu conține componenta corespunzătoare a lui $f_1(t)$.

Descrierea semnalelor cu seturi de funcții ortogonale

Funcțiile $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t)$,…, $f_n(t)$ sunt ortogonale într-un interval specificat dacă prezintă proprietatea :

$$\int_{t_1}^{t_2} f_n(t) f_m(t) dt = \begin{cases} 0, n \neq m \\ k_n, n = m \end{cases} \tag{4}$$

Sistemul de funcții $\{\phi_n(t)\}$ este ortonormal sau ortogonal şi normalizat, cu ponderea *r(t)*, dacă :

$$\int_{t_1}^{t_2} r(t)\phi_n(t)\phi_m(t) dt = \begin{cases} 0, n \neq m \\ 1, n = m \end{cases} \tag{5}$$

Semnalul *f(t)* poate fi aproximat cu ajutorul unui set de funcții ortogonale $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t)$,…, $f_n(t)$ dacă poate fi scris sub forma :

$$f(t) \approx \sum_1^n a_i f_i(t) \tag{6}$$

Minimizarea eroarii medii pătratice corespunzătoare acestei aproximări, permite conform ec. (3.b), determinarea coeficienților C_k ai aproximării :

$$a_k = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t) f_k(t) dt}{\int_{t_1}^{t_2} f_k^2(t) dt} \tag{7}$$

Exemple de funcții ortogonale

- <u>*seriile Fourier*</u>
- polinoamele Legendre
- funcțiile Walsh
- funcțiile Bessel
- funcțiile Chebychev
- funcțiile Laguerre

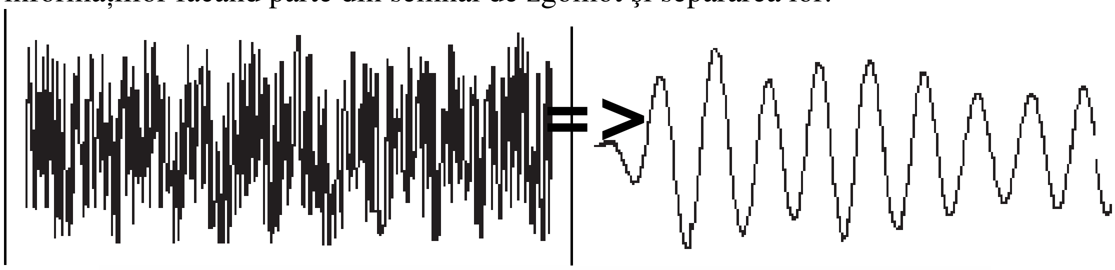
<u>*Seriile Fourier*</u>

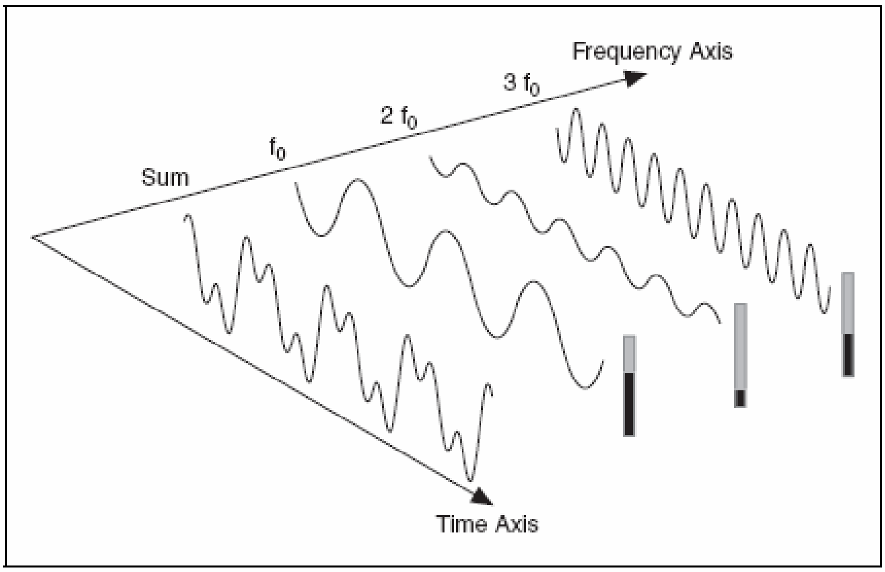
- periodice
- se bazează pe funcțiile sinus
- ortogonale în intervalul $t_1 + nT < t < t_1 + (n+1)T$, $n \in \mathrm{N}$
- funcțiile corespondente sunt cosinusoide $\left.\begin{matrix} \sin n\omega_1 t \\ \cos n\omega_1 t \end{matrix}\right\}$, $\omega_1 = 2\pi f_1 = 2\pi / T$.

2.2.Analiza în frecvență în cadrul măsurărilor de date

Cel mai frecvent tip de reprezentare ortogonală a unei funcții periodice este dată de seriile Fourier. Această reprezentare, bazată pe ortogonalitatea funcțiilor sin şi cos, conferă minimul de varianță şi o estimare conformă a semnalelor periodice afectate de zgomote.

Reprezentarea semnalelor în domeniul frecvență este de o importanță deosebită în domeniile tehnice. Analiza în frecvență este procesul de calcul al valorilor numerice pentru parametrii semnalelor în domeniul frecvență. Această analiză pune în evidență atât informația conținută în semnal, cât şi orice interferență care îl contaminează. Scopul este diferențierea informațiilor făcând parte din semnal de zgomot şi separarea lor.





Signal Formed by Adding Three Frequency Components

Analiza Fourier este cel mai eficient instrument din acest punct de vedere, oferind varinate relaționare a semnalelor în domeniul timp şi frecvență.

2.2.1. Seria Fourier generalizată

Instrumentul general de modelare a semnalelor periodice este seria Fourier generalizata (SFG).

Autor seriile Fourier – reprezentare ortogonală a semnalelor– Jean Baptiste Joseph, Baron de Fourier; 1822- *Teoria analitică a căldurii.*

- ☐ Descrierea functiei *f(t)* se face în SFG cu ajutorul unui sistem de funcții liniar independente $\{f_i(t)\}$,ortogonale, de normă C, cu i=0,1,2,3,.... Exprimarea lui f(t) prin SFG este:

$$f(t)=\sum_{i=0}^{\infty} a_i f_i(t) \tag{8}$$

- ☐ În practică, limita superioară a sumei este întotdeauna finită.

- ☐ ***Cum se aleg funcțiile $\{f_i(t)\}$ i=1, 2, 3, …?***

- să fie liniar independente;
- să realizeze o bună aproximare, atunci când limita superioară din suma, N, este dată;
- eroarea f_e(t) trebuie sa fie minimă;
- să poată fi uşor generate (ex. fcț.trigonometrice);
- determinarea răspunsului unui sistem, când la intrare se aplică semnalul modelat, să se realizeze cu uşurință;
- determinarea parametrilor $\{a_i\}$ să se realizeze cu usurință.

- ☐ ***Determinarea parametrilor $\{a_i\}$***

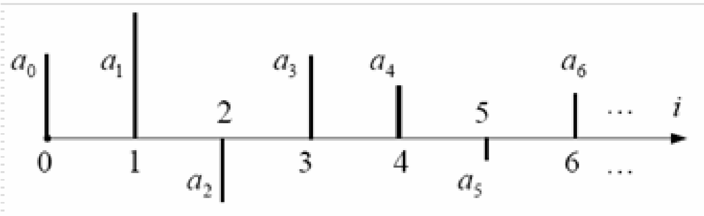
Se consideră modelul (8) cu un număr finit de parametri în cazul sistemelor de funcții ortogonale.

Ținând cont de proprietatea de ortogonalitate =>

$$a_j=\frac{1}{C_j^2}\int_T f(t)\cdot f_j(t)dt, \quad j=1,2,...,N \tag{9}$$

- Se constată că parametrii $\{a_i\}i$=1,2,… se calculează în mod independent, fiecare față de ceilalți.
- Dacă, pentru un *N* ales arbitrar, rezultă o eroare de modelare inacceptabilă, se adaugă noi termeni şi se calculează parametrii a_{N+1}, a_{N+2},... , până se obține precizia dorită pe intervalul *T*, fără ca parametrii determinați anterior să fie afectați.

- ☐ ***Noțiunea de spectru***



Spectrul SFG al unui semnal

Reprezentarea grafică a ansamblului parametrilor $\{a_i\}$i=1,2… se numeste ***spectru***.

- ☐ ***Unicitatea reprezentării semnalelor prin SFG***

Considerăm că pentru modelarea semnalului (8) se utilizează un număr finit N de termeni. Presupunem că avem coeficientii b_i diferiti de a_i.

$$f(t)=\sum_{i=0}^{N} b_i f_i(t) \tag{10}$$

Calitatea aproximării semnalului real pe intervalul [t;$t+T$] este dată de *integrala erorii medii pătratice.*

Ştiind că:

$f_i(t)f_j(t)=0$ pentru $i \neq j$; $\int\limits_T f_i(t)f(t)dt = C^2 a_i$; $\int\limits_T f^2(t)dt = C^2$

rezultă:

$$f_e^2 = \int\limits_T f^2(t)dt - 2C^2\sum_{i=0}^{N} a_i b_i + C^2\sum_{i=0}^{N} b_i^2 \quad \Big| \pm C^2\sum_{i=0}^{N} a_i^2$$

$$f_e^2 = \int\limits_T f^2(t)dt - C^2\sum_{i=0}^{N} a_i^2 + C^2\sum_{i=0}^{N}(a_i - b_i)^2 \tag{11}$$

Pentru ca (11) să fie minimă, trebuie ca $b_i=a_i$. Prin urmare, parametrii modelului cu număr finit de termeni de dezvoltare sunt unici, indiferent de N.

Cum

$$f_e^2 = \int\limits_T f^2(t)dt - C^2\sum_{i=0}^{N} a_i^2$$

Deoarece $I \geq 0$ pentru N finit $\Rightarrow$

$$\int\limits_T f^2(t)dt \geq C^2\sum_{i=0}^{N} a_i^2 \qquad \textit{Inegalitatea lui Bessel} \tag{12}$$

Cum

$$\int\limits_T f^2(t)dt = \int\limits_T f(t)f(t)dt$$

Tinand cont de (4) $\Rightarrow$

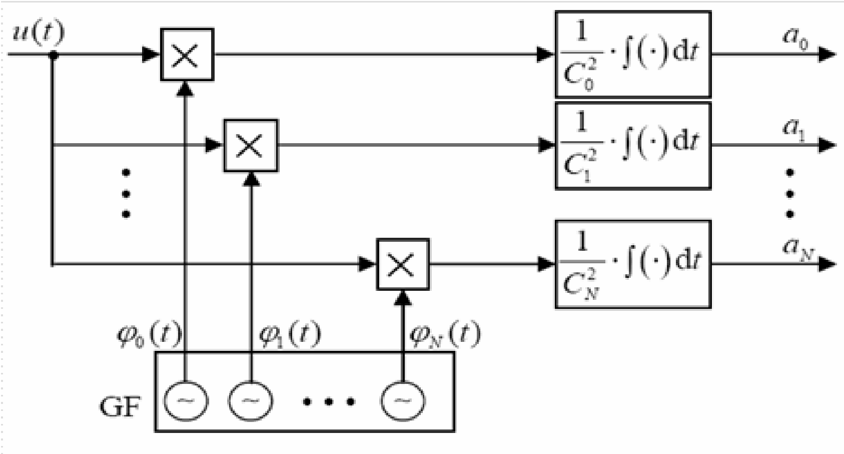
$$\int\limits_T f^2(t)dt = C^2\sum_{i=0}^{\infty} a_i^{\,2} \qquad \textbf{\textit{Egalitatea lui Parseval}} \tag{13}$$

- are o interpretare energetică: dacă u(t) este un semnal de tensiune, atunci integrandul $u^2(t)$ este puterea instantanee pe o rezistență unitară, iar integrala este energia dezvoltată în intervalul de timp T;
- această energie se repartizează pe componentele dezvoltării din SFG, proporțional cu pătratele parametrilor a_i, i=0,1,2,…

2.2.2. Problema de analiză a semnalelor

Problema se formulează astfel: se dă semnalul $u(t)$ şi se cere spectrul său.

Aparatul care rezolvă problema s.n. *analizor de semnal.*



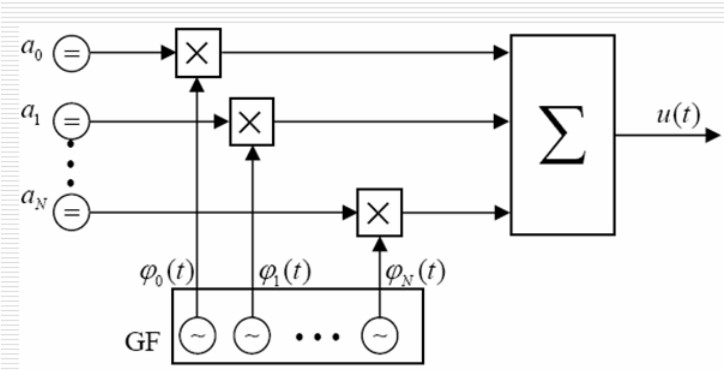
$$a_i = \frac{1}{C_i^2}\int_T u(t)\varphi_i(t)\mathrm{d}t, \qquad i = 0,1,\ldots,N$$

Schema de principiu a unui analizor spectral

2.2.3. Problema de sinteză a semnalelor

Este dat spectrul semnalului $u(t)$ şi se cere să se sintetizeze semnalul.

Echipamentul care realizează operația se numeste *sintetizor*; acesta se bazează pe relatia (4).



Schema de principiu a unui sintetizor de semnal

2.3. Analiza Fourier a semnalelor periodice

Seria Fourier trigonometrică (SFT)

Se defineşte sistemul de funcții ortogonale $\{\varphi_i\}$ $i=1,2,3,\ldots$: $\{1,\ \cos(\omega_0 t),\ \sin(\omega_0 t);\ \cos(2\ \omega_0 t),\ \sin(2\ \omega_0 t);\ldots;\ \cos(i\ \omega_0 0t),\ \sin(i\ \omega_0 t);\ldots\}$ unde $\omega_0=2\pi/T$; ω_0 – pulsatia semnalului; T – perioada semnalului periodic.

Pentru aceste funcții sunt valabile relațiile:

$$\int_T \cos(i\omega_0 t)\cos(j\omega_0 t)\mathrm{d}t = \begin{cases} \frac{T}{2}, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

$$\int_T \sin(i\omega_0 t)\sin(j\omega_0 t)\mathrm{d}t = \begin{cases} \frac{T}{2}, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

Norma pentru aceste funcții este $C=\sqrt{T/2}$.

Pentru funcția $\varphi_0(t)=1$ norma este:

$$C_0^2 = \int_T 1 \cdot 1 dt = T^2 \Rightarrow C_0 = \sqrt{T}$$

Dacă se înlocuieşte sistemul de funcții ortogonale în SFG =>

$$u(t) = a_0 \cdot 1 + a_1 \cos(\omega_0 t) + a_2 \sin(\omega_0 t) + a_3 \cos(2\omega_0 t) + a_4 \sin(2\omega_0 t)...$$

Sau prin înlocuirea parametrilor a_i cu C_i , respectiv cu S_i => ***SFT***

$$u(t) = C_0 + \sum_{i=1}^{\infty} C_i \cos(i\omega_0 t) + \sum_{i=0}^{\infty} S_i \sin(i\omega_0 t) \tag{14}$$

Coeficienții seriei sunt de forma:

$$C_0 = \frac{1}{T}\int_T u(t)\varphi_0(t)dt = \frac{1}{T}\int_T u(t)\cdot 1 dt$$

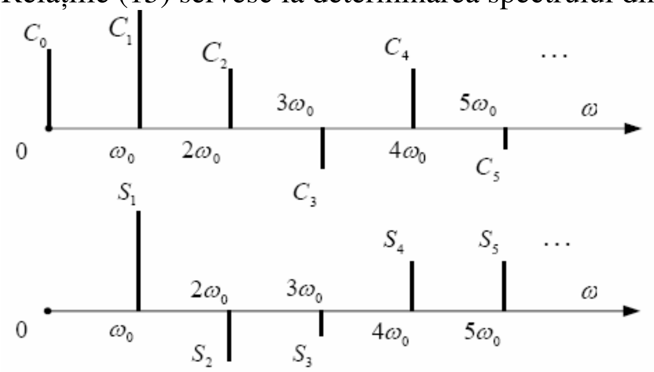
$$C_0 = \frac{1}{T}\int_T u(t)dt$$ Medie a semnalului = componenta de c.c.

(15)

$$C_i = \frac{2}{T}\int_T u(t)\cos(i\omega_0 t)dt, \quad i = 1,2,...$$

$$S_i = \frac{2}{T}\int_T u(t)\sin(i\omega_0 t)dt, \quad i = 1,2,...$$

Relațiile (15) servesc la determinarea spectrului din SFT.



Spectrul SFT al unui semnal periodic

Seria Fourier armonică (SFA)

Se obține din *SFT* prin transformarea termenului general:

$$C_i \cos(i\omega_0 t) + S_i \sin(i\omega_0 t) = A_i \cos(i\omega_0 t + \varphi_i)$$

unde

$$A_i = \sqrt{C_i^2 + S_i^2}, \quad i = 1,2,... \qquad A_0 = C_0,$$

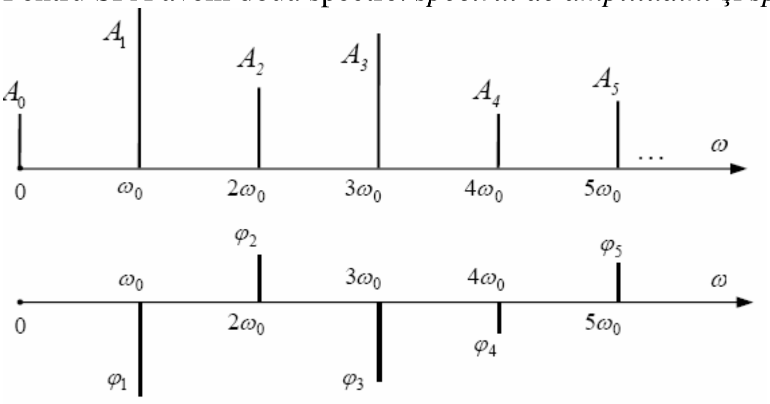
$$\varphi_i = -arctg\frac{S_i}{C_i}, \quad i = 1,2,...$$

Dacă se înlocuieşte în (15) =>

$$u(t) = A_0 + \sum_{i=1}^{\infty} A_i \cos(i\omega_0 t + \varphi_i) \qquad (16)$$

- Reprezentarea semnalului u(t) în ***SFA***, adică o sumă de armonici plus o componentă continuă A_0;
- Componenta *i* este determinată prin *amplitudine* şi *fază inițială;*
- Componenta *i=1* se numeşte *armonică fundamentală* sau simplu *fundamentala.*

Pentru SFA avem două spectre: *spectrul de amplitudini* şi *spectrul fazelor inițiale.*



Spectrul de amplitudini şi de faze inițiale la SFA

Seria Fourier complexă (SFC)

Reprezentarea nesimplificată a armonicii *i* în planul complex se face printr-un vector rotitor de lungime *Ai* şi argument $i\omega_0 t+\varphi_i$.

$$A_i e^{j(i\omega_0 t+\varphi_i)} = \underline{A_i} \cdot e^{ji\omega_0 t}$$

unde

$\underline{A_i} = A_i e^{j\varphi_i}$ reprezentarea în complex simplificată a armonicii *i*

Înlocuind pe i cu –i rezultă:

$\underline{A_{-i}} = A_i e^{-j\varphi_i} = \underline{A_i^*}$, conjugata lui $\underline{A_i}$

$$A_i \cos(i\omega_0 t + \varphi_i) = \frac{1}{2}\left(\underline{A_i} e^{ji\omega_0 t} + \underline{A_{-i}} e^{-ji\omega_0 t}\right)$$

$$\Rightarrow u(t) = A_0 + \frac{1}{2}\sum_{i=-\infty}^{\infty} \underline{A_i} e^{ji\omega_0 t}$$

Daca notam $\underline{A_0} = 2A_0$

$$u(t) = \frac{1}{2}\sum_{i=-\infty}^{\infty} \underline{A_i} e^{ji\omega_0 t} \qquad (17)$$

modelul semnalului în ***seria Fourier complexa (SFC)***

$$A_i = \sqrt{C_i^2 + S_i^2} \text{ si } \varphi_i = -arctg\frac{S_i}{C_i} \Rightarrow$$

$$\underline{A_i} = C_i - jS_i$$

$$\underline{A_i} = \frac{2}{T}\left[\int_T u(t)\cos(i\omega_0 t)dt - j\int_T u(t)\sin(i\omega_0 t)dt\right] = \qquad (18)$$

$$\underline{A_i} = \frac{2}{T}\int_T u(t)[\cos(i\omega_0 t) - j\sin(i\omega_0 t)]dt$$

Coeficientii SFC

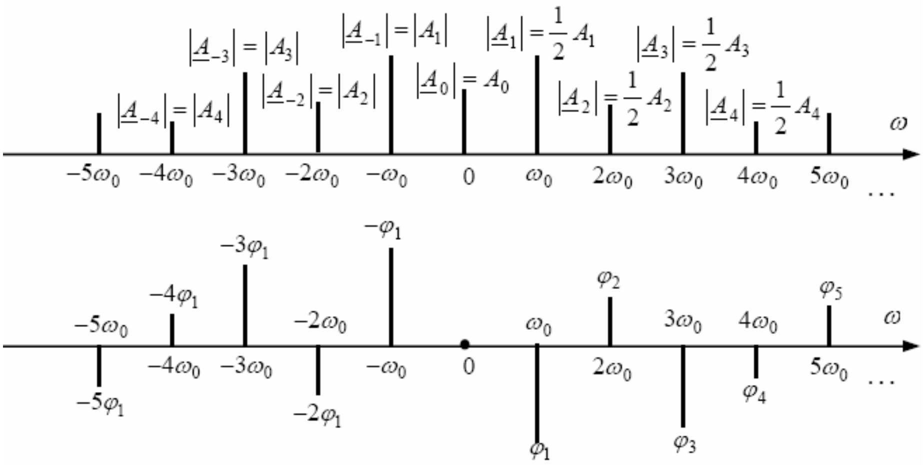
$$\underline{A_i} = \frac{2}{T}\int_T u(t)e^{-ji\omega_0 t}dt$$

SFC se mai poate scrie sub forma (cea mai utilizata formă în aplicații):

$$u(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty}\underline{A_i}e^{ji\omega_0 t}$$

$$\underline{A_i} = \frac{1}{T}\int_T u(t)e^{-ji\omega_0 t}dt \qquad (19)$$

$$\left|\underline{A}_{\pm i}\right| = \frac{1}{2}\cdot A_i; \qquad \varphi_{\pm i} = \pm\varphi_i$$



Spectrul unui semnal periodic în SFC

Observații

1. Pentru simplificarea exprimării, s-a utilizat noțiunea de „spectru" şi in cadrul SFC, chiar dacă aici reprezentarea spectrală include mărimi fara corespondent fizic (frecvențe negative).
2. La calculul parametrilor SFT se ține cont de următoarele reguli de calcul:

- dacă u(t) este functie pară, adică u(−t)=u(t), rezultă:

$$S_i = 0;\ C_0 = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} u(t)\mathrm{d}t;\ C_i = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} u(t)\cos(i\omega_0 t)\mathrm{d}t, \quad i = 1, 2, ...$$

- dacă u(t) este funcție impară, adică u(−t)= −u(t), rezultă:

$$C_i = 0;\ S_i = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} u(t)\sin(i\omega_0 t)\mathrm{d}t, \quad i = 1, 2, ...$$

3. Presupunem că semnalul u(t) este întârziat cu timpul τ. Pentru obținerea modelului semnalului întârziat, u(t-τ), se înlocuieşte t cu t-τ în SFC, rezultând:

$$u(t-\tau) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \underline{A_i} e^{ji\omega_0(t-\tau)} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \underline{A_i} e^{-ji\omega_0\tau} \cdot e^{ji\omega_0 t} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \underline{\widetilde{A_i}} e^{ji\omega_0 t}$$

unde:

$$\underline{\widetilde{A_i}} = \underline{A_i} e^{-ji\omega_0\tau}$$

Se constata că:

$$\left|\underline{\widetilde{A_i}}\right| = \left|\underline{A_i}\right|$$

=> spectrul de amplitudini nu se modifică, dar fazele inițiale sunt afectate de întârziere:

$$\widetilde{\varphi_i} = \varphi_i - i\omega_0\tau$$